Módulos de matemáticas

Aprendizaje paso a paso

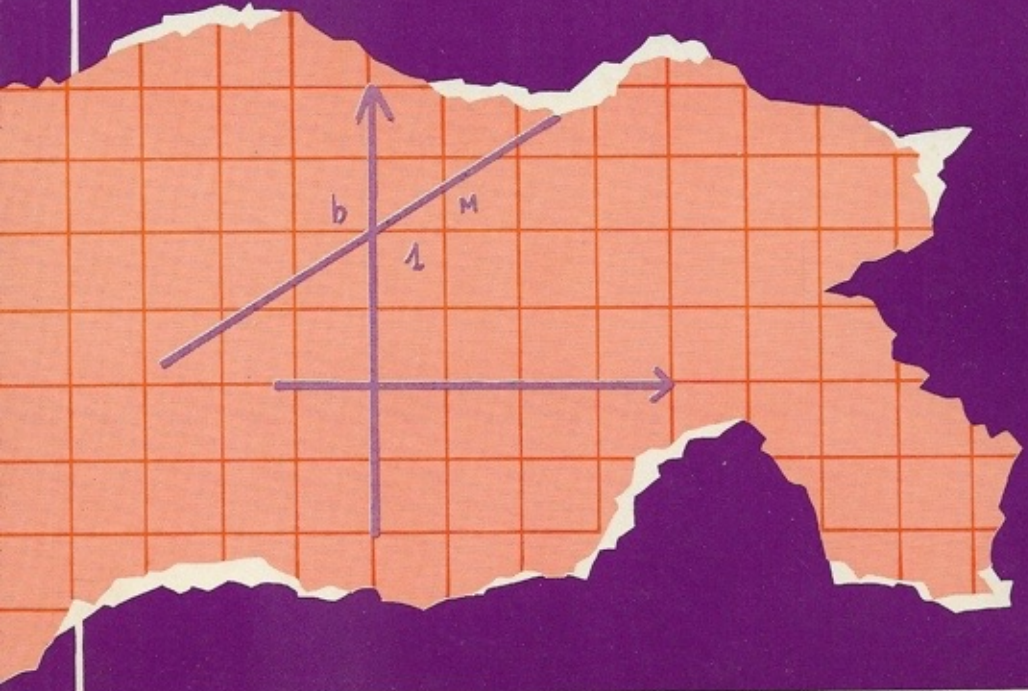
Bloque 6

Geometría analítica

Módulo 2

LA RECTA

Conrado Flores García



trillas

SERIE MÓDULOS DE MATEMÁTICAS

Conrado Flores García

A través del tiempo y en todos los niveles de aprendizaje, los estudiantes han considerado a las matemáticas como un escollo insalvable. Aun cuando se han establecido nuevos enfoques pedagógicos para la enseñanza de esta materia, casi siempre los educandos enfrentan su estudio con verdadero temor, debido al prejuicio generalizado sobre la supuesta dificultad de esta asignatura.

La serie *Módulos de matemáticas*, a la cual pertenece el presente texto, es un valioso auxiliar con el que puede abordarse sencilla y eficazmente el proceso de enseñanza-aprendizaje de este campo de conocimiento.

Es necesario destacar que los *Módulos de matemáticas* constituyen un método de *aprendizaje paso a paso*, ya que la información se presenta por medio de cuadros didácticos (informativos, de preguntas y de respuestas), que están organizados en orden creciente de complejidad. De este modo, se conduce *paso a paso* al lector desde los conceptos más elementales, como los de conjunto y elemento, hasta los más complejos de cálculo integral, pasando por aquéllos del álgebra (estructuras, operaciones y modelos), de la lógica matemática, de la geometría euclidiana, de la trigonometría, de la geometría analítica y del cálculo diferencial.

Mediante este novedoso sistema, más ágil y motivador que el de la enseñanza programada, se facilita tanto la exposición de los temas como la comprensión y asimilación de los mismos.

El autor revisa el panorama matemático fundamental a lo largo de los 64 módulos que, agrupados en 8 bloques, constituyen la serie. Además, cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos denominado *Memo*.

Los profesores de enseñanza secundaria, de preparatoria y de universidad pueden emplear los *Módulos de matemáticas* como parte integrante de sus guiones didácticos y los estudiantes tienen la posibilidad de incorporarse como material complementario y de apoyo a las experiencias adquiridas en el aula. Asimismo, estos libros son útiles para las personas que quieran actualizar o bien repasar, sus conocimientos en esta área o para quienes deseen iniciar un aprendizaje autodidáctico por la imposibilidad de asistir a una institución educativa.

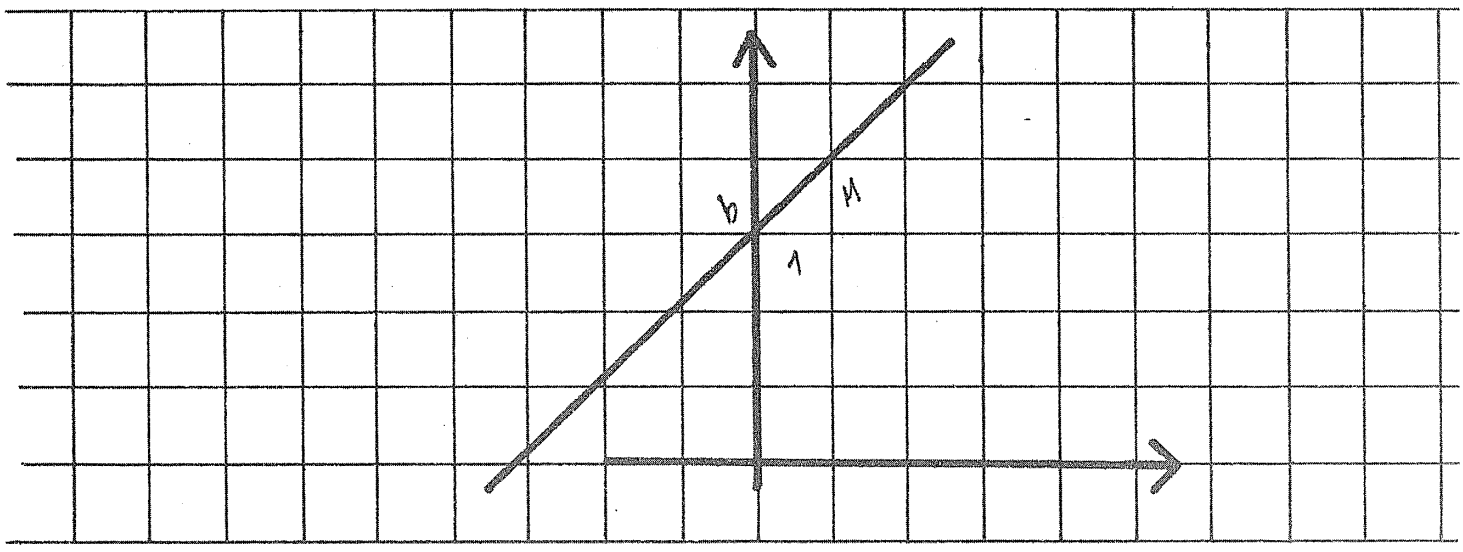
Esperamos que al estudiar los Módulos de matemáticas, los alumnos se den cuenta de que esa fortaleza defendida por ejércitos de números, símbolos y fórmulas, aparentemente inexpugnable, puede ser alcanzada por cualquier persona decidida y tesonera.

LA RECTA

Obras que integran el bloque 6 *(Geometría analítica):*

1. Introducción a la geometría analítica
2. *La recta*
3. La circunferencia
4. La elipse
5. La hipérbola
6. La parábola
7. Las cónicas y la ecuación general de segundo grado
8. Relaciones y lugares geométricos.

ANUIES
Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 6
Geometría analítica

Módulo 2

LA RECTA

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España, Venezuela.

La presentación y disposición en conjunto de
LA RECTA
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1984, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, julio 1984
ISBN 968-24-1249-8

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

2.1 Ecuación de la recta en la forma: $y = mx + b$ 9

2.2 Ecuación de la recta, en la forma: $y - y_1 = m(x - x_1)$ 35

2.3 Ecuación de la recta, en la forma: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ 42

2.4 Ecuación de la recta, en la forma: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 45

2.5 Ecuación de la recta, en la forma: $Ax + By + C = 0$ 51

2.6 Las ecuaciones de la recta. Resumen 62

2.7 Intersección de las rectas 66

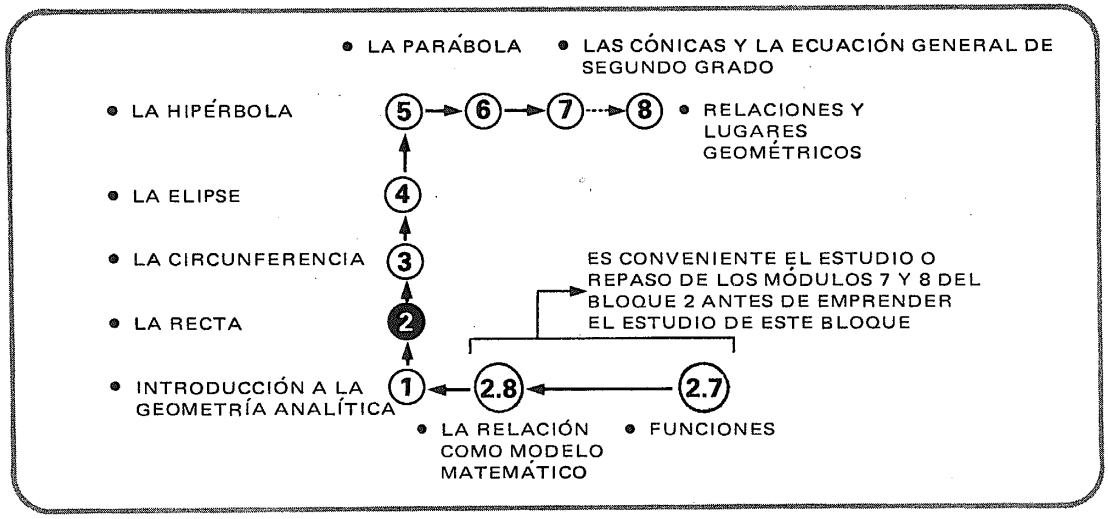
2.8 Distancia de un punto a una recta 71

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 6. Geometría analítica

Objetivos: caracterizar en el plano cartesiano el lugar geométrico representado por una relación cuya regla de correspondencia es una ecuación lineal, una ecuación cuadrática, o bien, una ecuación, una desigualdad, un sistema de ecuaciones o de desigualdades cualesquiera

Esquema estructural del bloque 6



Módulo 2. La recta

Objetivos: caracterizar en el plano cartesiano el lugar geométrico llamado recta

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Resolución algebraica de ecuaciones de primer grado y de sistemas de ecuaciones de primer grado	2	2, 3
• La función lineal	2	8
• Resolución gráfica de ecuaciones de primer grado y de sistemas de ecuaciones de primer grado	2	11
• Propiedades geométricas de segmentos, ángulos, triángulos y demás polígonos convexos	4	1, 2, 3, 4, 5, 6
• Las funciones trigonométricas directas o inversas	5	1, 3, 4, 5
• Algunas identidades trigonométricas	5	6

2.1

Ecuación de la recta en la forma $y = mx + b$

1

Recordemos que
la expresión

$$\mathbf{F} = \left\{ (x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \wedge \ \mathbf{y = f(x)} \right\}$$

en que

$y = f(x)$ toma la forma $\mathbf{y = mx + b}$ $\quad m, b \in \mathbb{R}$

representa una: [ ]

función lineal

2

La gráfica de la función lineal

$$F = \left\{ (x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \wedge \mathbf{y = mx + b} \ ; m, b \in \mathbb{R} \right\}$$

es una [ ]

recta

3

En la expresión $y = mx + b$

sabemos que

si $m > 0$

la función lineal representada

es

creciente/decreciente.

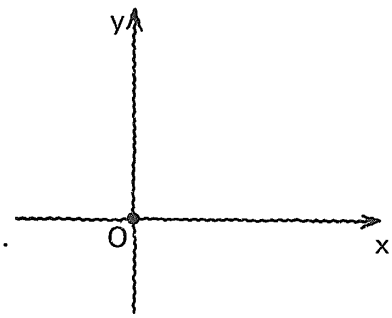
creciente

4

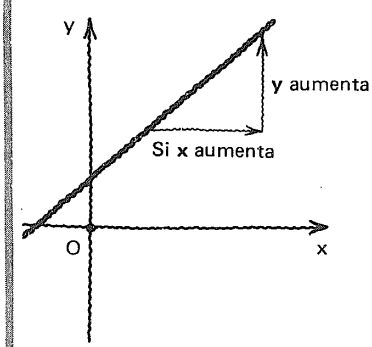
La gráfica de una

función lineal creciente

tiene este aspecto (completarla).



por ejemplo



si x aumenta, entonces y aumenta

si x disminuye, entonces y disminuye

5

En $y = mx + b$

si $m < 0$

la función representada

es

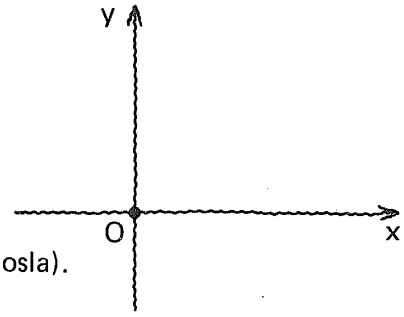
decreciente

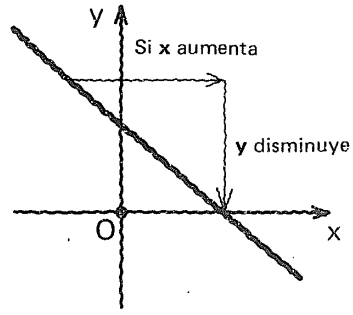
6

La gráfica de una

función lineal decreciente

tiene este aspecto (completémosla).





si x aumenta, entonces y disminuye

si x disminuye, entonces y aumenta

7

En la expresión

y = mx + b

al número real **m**

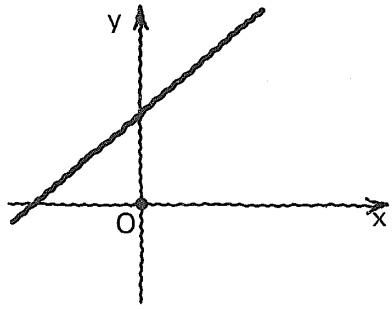
le hemos llamado

_____

y es una medida del grado de

inclinación

de la recta.

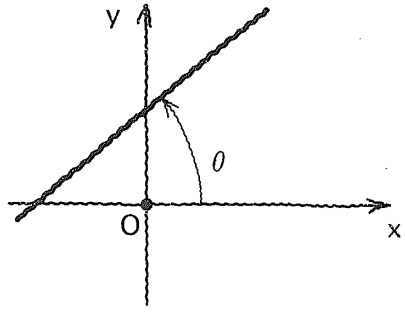


pendiente

8

Al ángulo determinado por la recta y el eje de las x (o una paralela a éste), y medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj, le hemos llamado:

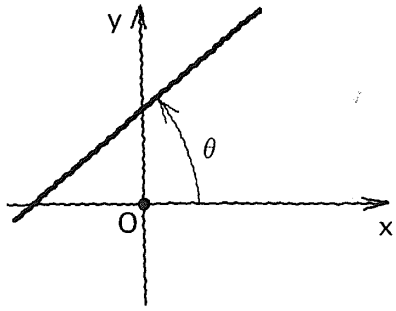
_____



ángulo de inclinación

9

Recordemos también que la relación entre la pendiente **m** y la medida del ángulo de inclinación θ está dada por la expresión:



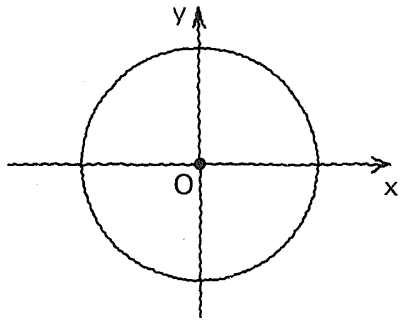
$m = \tan \theta$
ó $\theta = \arctan m$

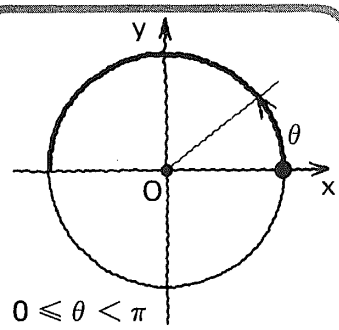
10

El intervalo considerado en este estudio, para la medida de θ, puede ser escrito así:

como conjunción de desigualdades

como intervalo





$0 \leqslant \theta < \pi$

o

$[0, \pi)$

11

Si **m = 0** la expresión

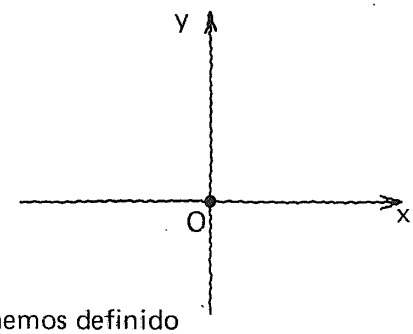
y = mx + b

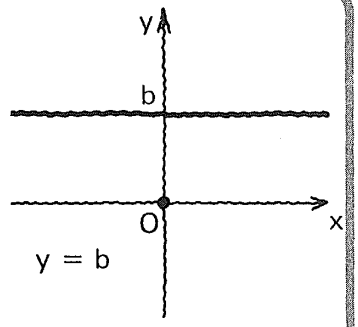
toma la forma

que corresponde a lo que hemos definido

como función

Hacer la gráfica representativa de una función de este tipo.





$y = b$

constante

12

En una

función lineal creciente

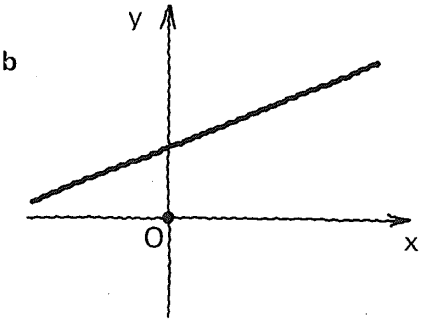
representada por $y = mx + b$

se tiene que:

$m \in$ [ ]

y intervalos

$\theta \in$ [ ]



$(0, +\infty)$

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ o $(0°, 90°)$

13

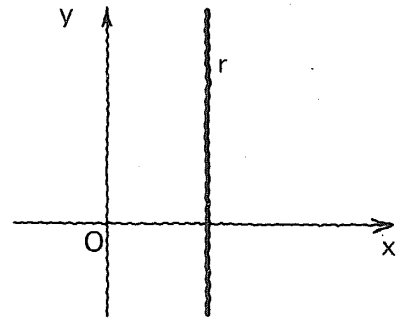
$r \parallel \overleftrightarrow{oy}$

¿Corresponde esta gráfica a una función lineal?

Sí/No

porque

[ ]



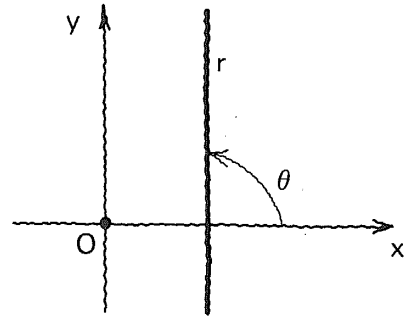
- no
- puede trazarse una paralela a $\overleftrightarrow{oy}$ que interseque a la gráfica en más de un punto

14

Para la recta representada por la gráfica adjunta:

$m =$ [ ]

$\theta =$ [ ]



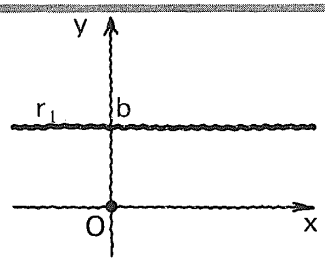
número no definido

$\frac{\pi}{2}$ o $90°$

15

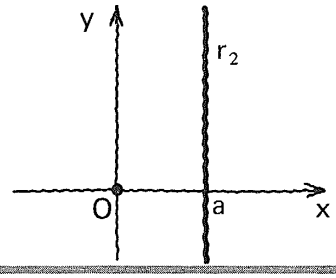
Hemos visto que
la regla de correspondencia
para la función representada
por r_1

es [_____]



De manera similar,
podemos establecer que
la regla de correspondencia
para r_2

es [_____]



Observar con atención

$y = b$

$x = a$

16

¡Atención!
Decimos que esta es
la

gráfica de la ecuación

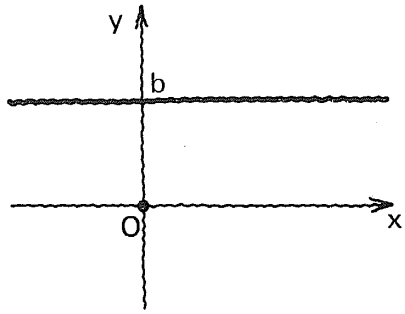
$y = b$

y que:

una ecuación de la gráfica

es

$y = b^*$



* Otra ecuación de tal gráfica sería, por ejemplo $y - b = 0$

17

Una **gráfica de la ecuación**

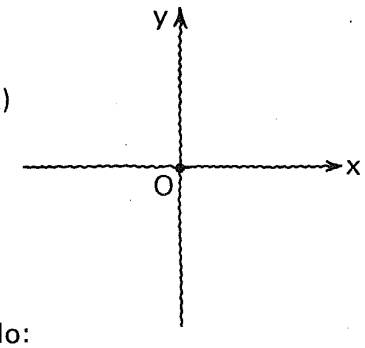
$x = a$ es la mostrada (completarla)

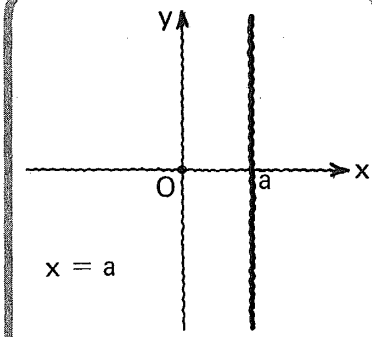
Una ecuación de esta gráfica

es: [_____]

Otra ecuación correspondiente a
esa misma gráfica sería, por ejemplo:

[_____]





$x = a$

$x - a = 0$

18

Una

ecuación de una recta paralela al eje de las x

puede escribirse así:

_____

y es una expresión
de la regla
de correspondencia
de una:

_____

o cualquier otra literal

$y = b$ o $y - b = 0$

función constante

19

Una

ecuación de una recta paralela al eje de las y

puede escribirse así:

_____

y es una expresión
de la regla
de correspondencia
de una:

_____

o cualquier otra literal

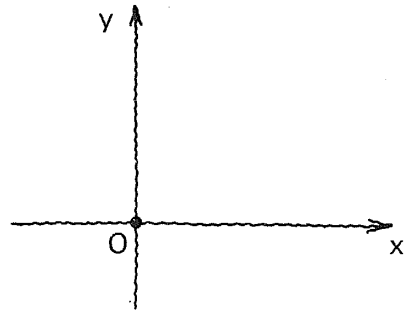
$x = a$ o $x - a = 0$

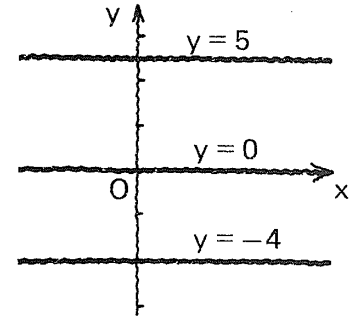
relación cualquiera

20

Hagamos la
representación gráfica
de las ecuaciones:

1. $y = 5$
2. $y = -4$
3. $y = 0$

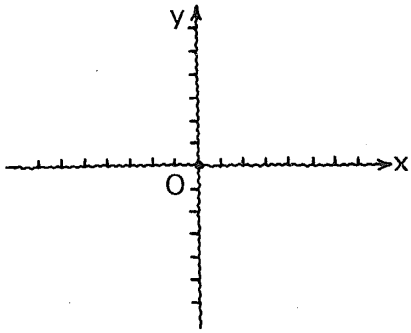


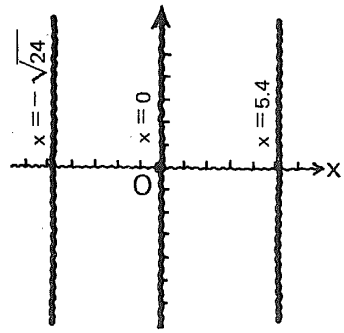


21

Representemos, ahora, gráficamente las ecuaciones:

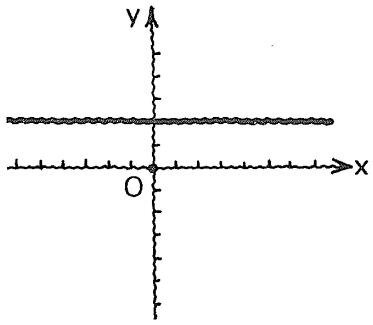
1. $x = 5.4$
2. $x = -\sqrt{24}$
3. $x = 0$





22

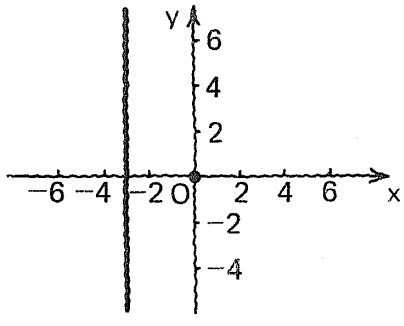
Dar una ecuación de la función constante representada en la gráfica.



$y = 2$ o $y - 2 = 0$

23

Dar una ecuación de la relación cualquiera representada en la gráfica.



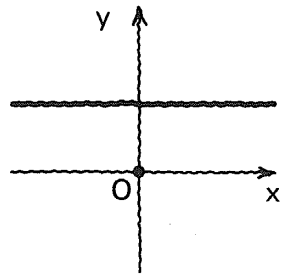
$x = -3$ o $x + 3 = 0$

5.2.1.1

Práctica adicional
si se considera necesario.

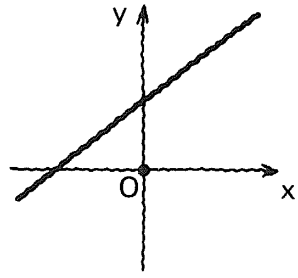
24

Estudiemos con atención este cuadro
de las posibles representaciones gráficas de $y = mx + b$

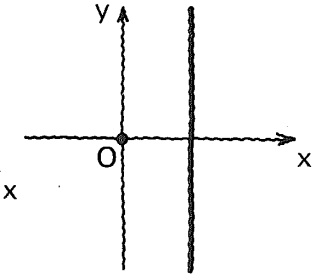


- gráfica de una **función constante:**

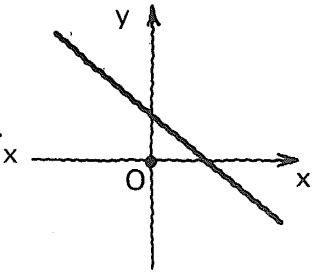
  $m = 0$



- gráfica de una **función lineal creciente:**
  $m > 0$



- gráfica de una **"no función lineal":**
  m no definido



- gráfica de una **función lineal decreciente:**
  $m < 0$

25

En la

ecuación de la recta

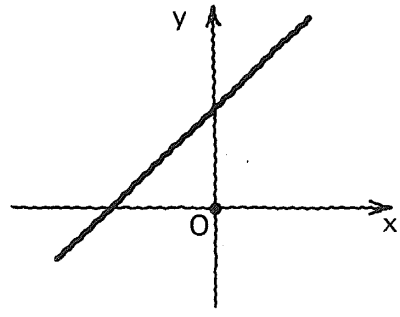
$y = mx + b$

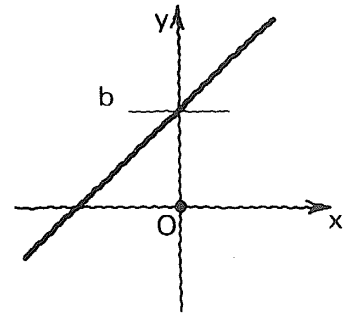
m representa la

pendiente.

Recordemos,
además,
que

b representa
lo que hemos llamado:





ordenada al origen

26

Entonces,
en la ecuación

$\mathbf{y = mx + b}$

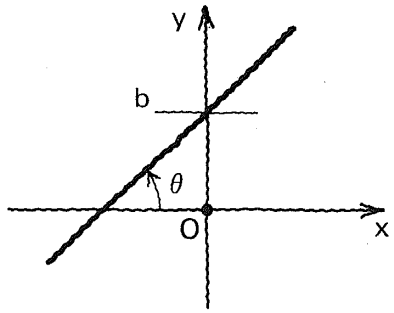
$\mathbf{m = \tan \theta}$

$0 \leqslant \theta < \pi \wedge \theta \neq \pi/2$

y

b es la ordenada al origen.

$b \in \mathbb{R}$



27

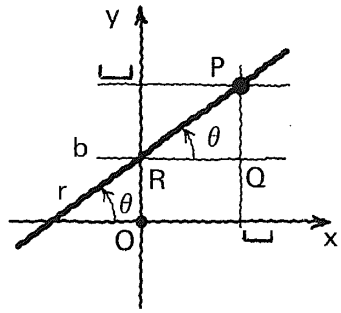
Veamos.

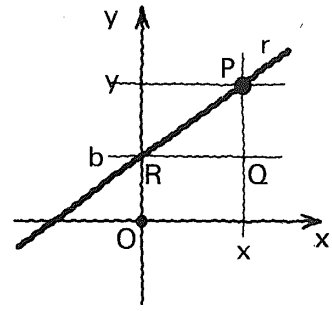
Sea **r** una recta cualquiera
no paralela al eje de las **y**,
y **P** = (x, y) un punto cualquiera
perteneciente a ella.

Trazamos:

$\overleftrightarrow{RQ} \parallel \overleftrightarrow{Ox}$ y $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{Oy}$

Rotulemos en los lugares señalados.



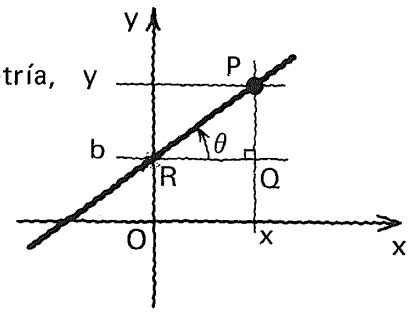


28

En el triángulo rectángulo
PQR, tenemos, por trigonometría,

que:

$\overline{|PQ|} =$ ⌊_____



$$\frac{\overline{|PQ|}}{x} = \tan \theta$$

$$\downarrow$$

$$x \tan \theta$$

29

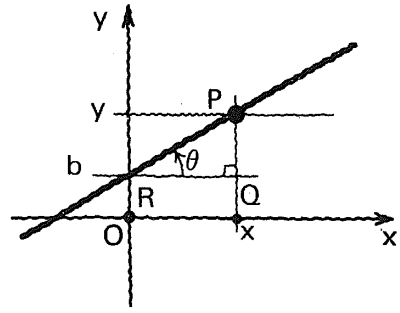
$|\overrightarrow{PQ}| = x \tan \theta$

pero hemos definido

$\tan \theta =$ [ ]

por lo tanto

$|\overrightarrow{PQ}| =$ [ ]



m

mx

30

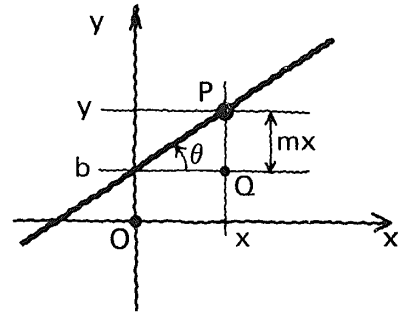
Hemos encontrado que

$|\overrightarrow{PQ}| = mx$

por lo tanto,

$y =$ [ ]

a partir de la observación cuidadosa de la figura.



mx + b

31

Estudiar con detenimiento la figura.

En la ecuación de una recta

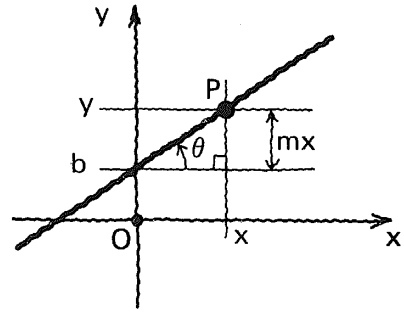
y = mx + b

m es la pendiente,

(m = tan θ)

y

b es la ordenada al origen.



32

Es importante recordar que

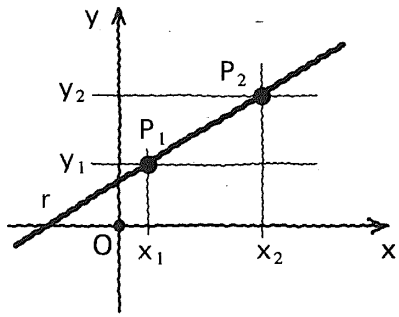
si $P_1 = (x_1, y_1)$
y $P_2 = (x_2, y_2)$

son dos puntos pertenecientes a la recta r, la

pendiente de r

puede ser expresada así;

m = [ ]



$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

o bien

$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

33

Se requiere una ecuación de una recta de pendiente 3/4 y ordenada al origen igual a 5.

Ver cuadro siguiente.

34

Expresión general

y = mx + b.

Sustituyendo datos:

m = [ ]

b = [ ]

y = [ ]

$\frac{3}{4}$

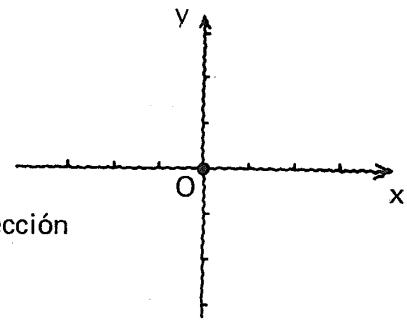
5

$\frac{3}{4} x + 5$

35

Estudiemos con atención el siguiente procedimiento para obtener la gráfica de una ecuación como

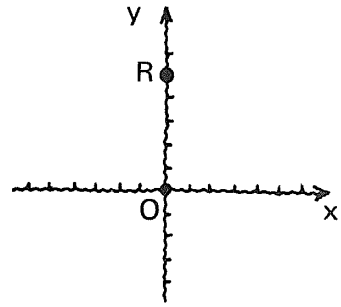
$$y = \frac{3}{4}x + 5.$$



1. Trazar el punto de intersección de la recta con el eje de las y, es decir:

   R = (0, b).

   En nuestro caso R = [ ]



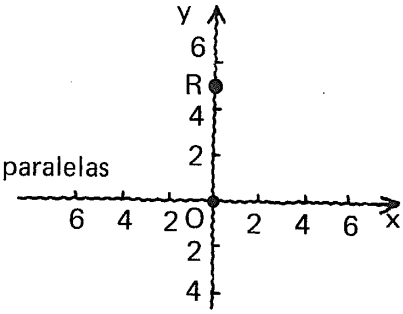
(0, 5)

36

$$y = \frac{3}{4}x + 5$$

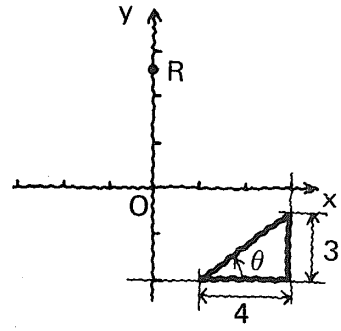
2. En cualquier lugar del plano cartesiano, trazar un *triángulo rectángulo* de referencia, en el que:
   - los catetos estén contenidos en rectas paralelas a los ejes cartesianos x y y
   - se verifique que:

     $m = \tan \theta$



Para nuestro caso, m = [ ]

Observar con atención*



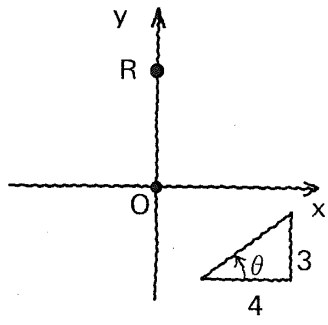
* Puede utilizarse cualquier unidad de medida para las dimensiones de este triángulo de referencia.

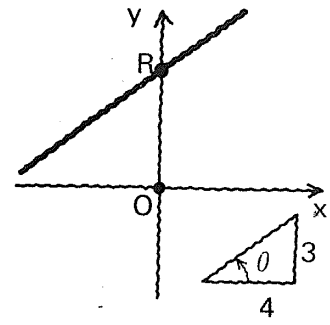
$\frac{3}{4}$

37

$$y = \frac{3}{4}x + 5$$

3. Trazar por R, "una paralela a la hipotenusa" del triángulo de referencia.



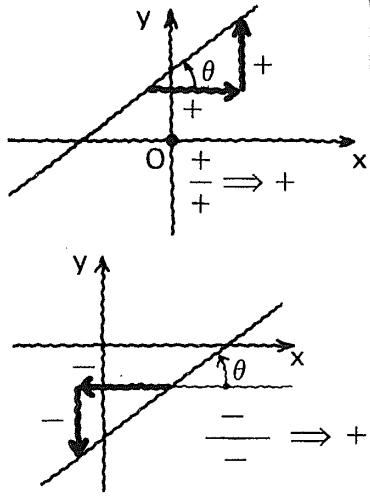


38

Si consideramos los catetos como segmentos dirigidos,

si **m > 0** (pendiente positiva) ⊕ el triángulo de referencia adoptará alguna de las posiciones mostradas y la **recta** será

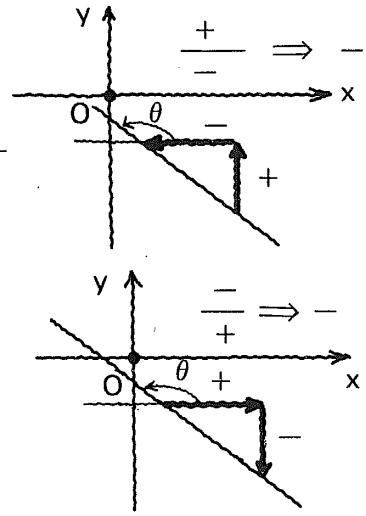
"creciente".



39

Si **m < 0** (pendiente negativa) — el triángulo de referencia adoptará alguna de las posiciones mostradas, y la **recta** será

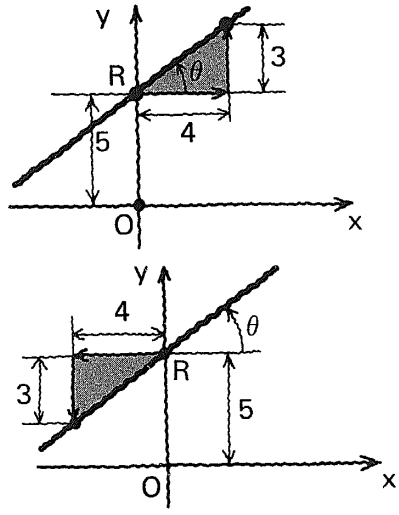
"decreciente"



40

Estudiar con mucha atención.

Tomemos nota de estas dos posiciones convenientes para el triángulo de referencia.



41

Procedimiento alternativo

para obtener la gráfica de la ecuación

$$y = \frac{3}{4}x + 5.$$

1. Obtener algebraicamente los puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados así:

   - para $y = 0$: $x =$ [ ] y $S =$ [ ] *
   - para $x = 0$: $y =$ [ ] y $R =$ [ ] **

* S es el punto de intersección de la recta con el eje de las x.
** R el punto de intersección de la recta con el eje de las y.

$-\frac{20}{3}$ $\left(-\frac{20}{3}, 0\right)$

5 (0, 5)

42

Hemos obtenido los puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados:

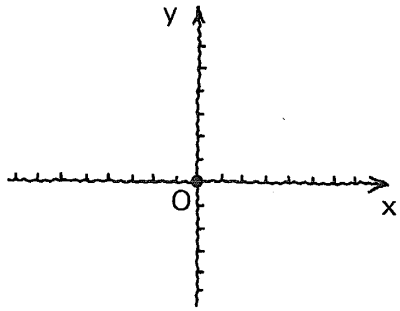
$S = \left(-\frac{20}{3}, 0\right)$

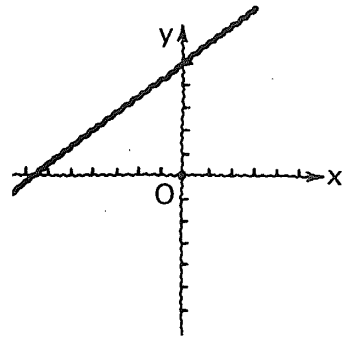
$R = (0, 5)$.

Con esta información podemos trazar la gráfica de

$$y = \frac{3}{4}x + 5.$$

Hagámoslo.





43

Otro

procedimiento

para obtener la gráfica de la ecuación

$$y = \frac{3}{4}x + 5$$

es nuestro conocido método de seleccionar algunos elementos (x) del dominio y determinar las correspondientes imágenes (y).

44

Por ejemplo.

Completar la tabla, calculando las imágenes de estos tres elementos del dominio arbitrariamente seleccionados.

x	$y = 3/4\ x + 5$
− 3	
0	
3	

11/4
5
29/4

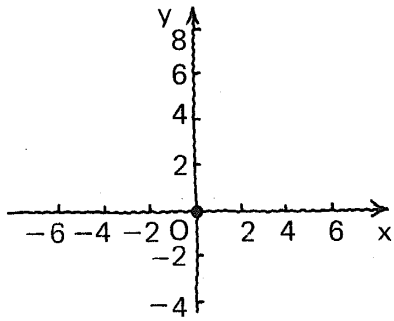
45

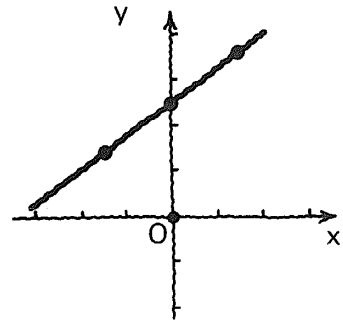
x	$y = \frac{3}{4}\ x + 5$
−3	11/4
0	5
3	29/4

Con esta información podemos trazar la gráfica de

$$y = \frac{3}{4}\ x + 5.$$

Hagámoslo.





46

Dar una ecuación de la recta cuya pendiente es igual a $-\frac{2}{3}$

y
cuya ordenada al origen es igual a − 2.

Ver cuadro siguiente

47

Expresión general:

Sustitución de los datos:

$\square = \square$

$\square = \square$

Ecuación requerida: $\square$

$y = mx + b$

$m = -\frac{2}{3}$

$b = -2$

$y = -\frac{2}{3}x + (-2)$

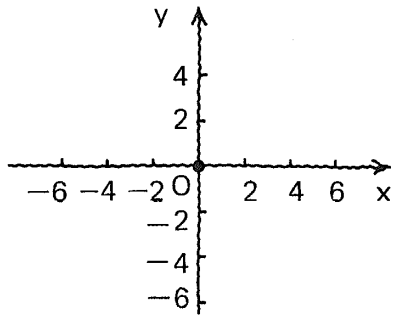
o

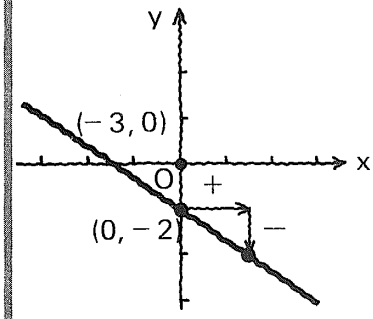
$y = -\frac{2}{3}x - 2$

48

Trazo de la gráfica de

$y = -\frac{2}{3}x - 2.$





49

Dar una ecuación de la recta con un ángulo de inclinación de 35° y que interseca al eje de las ordenadas a 3 unidades arriba del origen.

Ver cuadro siguiente.

50

Expresión general: [ ]

[ ] = [ ]

[ ] = [ ]

Ecuación requerida: [ ]

$y = mx + b$

$m = \tan 35° \doteq 0.7002$

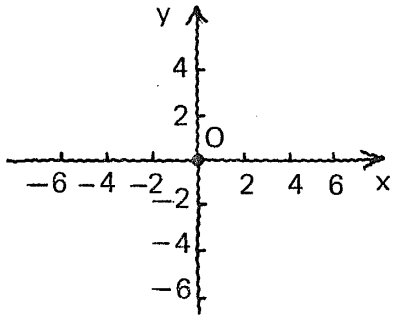
$b = 3$

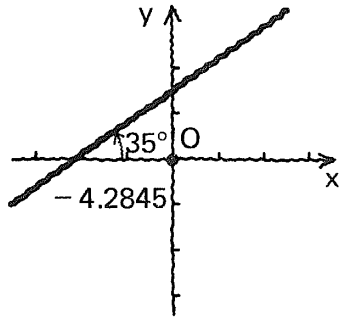
$y = 0.7002\,x + 3$

51

Trazar la gráfica correspondiente a

$y = 0.7002\,x + 3.$





52

Dar la ecuación de una recta que pasa por el origen con un ángulo de inclinación de 135°

Ver cuadro siguiente.

53

Expresión general: ⌊_____⌋

Datos { ⌊__⌋ = ⌊_____⌋ ; ⌊__⌋ = ⌊_____⌋ }

Ecuación requerida: ⌊_____⌋

$y = mx + b$

$m = \tan 135^\circ = -1$

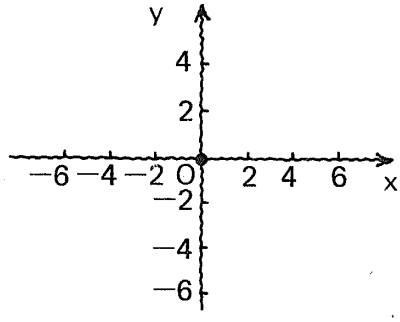
$b = 0$

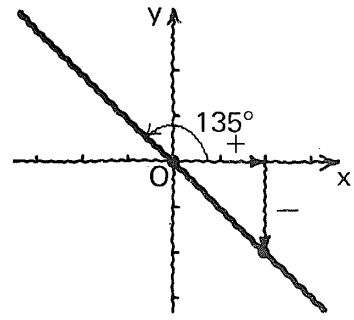
$y = -x$

54

Trazar la gráfica de

$y = -x.$





55

Cuál es la medida del ángulo de inclinación de una recta, una de cuyas ecuaciones es

$y = 3x - 1.$

56

Ecuación dada:

$y = 3x - 1$

$m =$ _____

$\theta =$ _____

3

arc tan $3 \doteq 71° 34'$
para $0 \leqslant \theta < 180°$

57

Cuál es la medida
del ángulo de inclinación
de una recta,
una de cuyas ecuaciones
es

$y = -0.357x + 6.255$

Ver cuadro siguiente

58

Ecuación dada:

$y = -0.357x + 6.255$

$m =$ _____

$\theta =$ _____

-0.357

arc tan $(-0.357) \doteq 160° 21'$
para $0 \leqslant \theta < 180°$

59

Dar una ecuación de la recta cuya ordenada al origen es igual a $\frac{9}{2}$ y es paralela a la recta $y = 2x - 3$.

Ver cuadro siguiente.

60

Expresión general: ⌊_____⌋

Datos { ⌊___⌋ = ⌊_____⌋ ; ⌊___⌋ = ⌊_____⌋ }

Ecuación requerida: ⌊_____⌋

Atención.

$y = mx + b$

$m = 2$ (pendiente de la recta: $y = 2x - 3$)

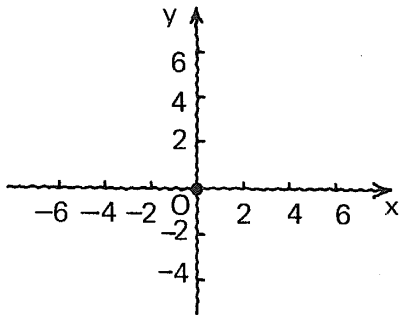
Recordemos que dos rectas paralelas tienen pendientes iguales.

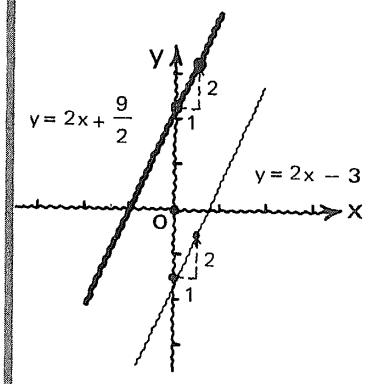
$b = \frac{9}{2}$

$y = 2x + \frac{9}{2}$

61

Gráfica cartesiana de la situación.





62

Hallar una ecuación de la recta que interseca al eje de las ordenadas a 3 unidades debajo del origen y es perpendicular a la recta: $y = \frac{2}{7}x$

63

Expresión general: ____

Datos { ____ = ____ ; ____ = ____ }

Ecuación requerida: ____

Atención.

$y = mx + b$

$m = -\frac{7}{2}$

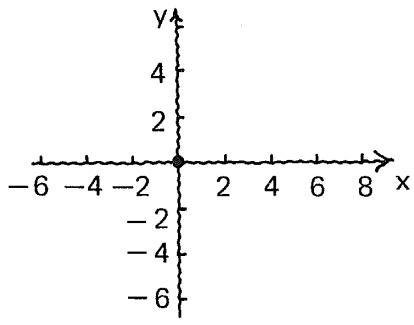
Recordemos que dos rectas perpendiculares entre sí tienen pendientes recíprocas y de signo contrario.

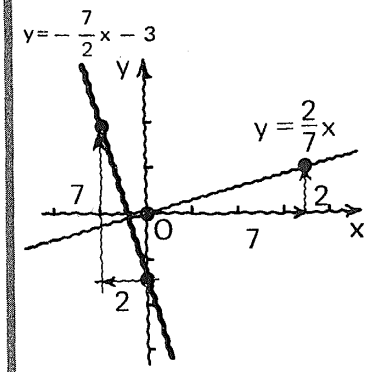
$b = -3$

$y = -\frac{7}{2}x - 3$

64

Gráfica cartesiana.





65

Una ecuación de una recta de pendiente m y que pasa por el origen es

$y =$ _____

mx
puesto que b = 0

66

Una recta está representada por la ecuación

$3x - 4y + 5 = 0$.

Se requiere conocer su pendiente y su ordenada al origen.

67

Ecuación dada: **$3x - 4y + 5 = 0$**

Transformaciones:

$\left\{\begin{array}{r} -4y = -3x - 5 \\ 4y = 3x + 5 \end{array}\right\}$ por ejemplo.

Otra ecuación de la recta, pero de la forma $y = mx + b$: _____

$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

Pendiente: $m =$ _____

$\frac{3}{4}$

Ordenada al origen: $b =$ _____

$\frac{5}{4}$

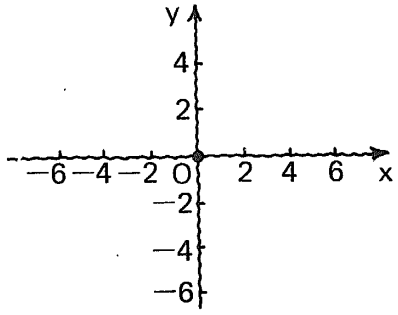
68

Trazar la gráfica correspondiente a cualquiera de las ecuaciones

$3x - 4y + 5 = 0$

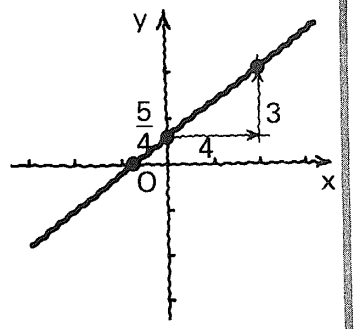
o

$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$



$3x - 4y + 5 = 0$

$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$



69

Determinar la medida del ángulo de inclinación y la ordenada al origen de la recta, una de cuyas ecuaciones es

$14x - 17y = 25$

70

Ecuación dada: $14x - 17y = 25$

Transformaciones:

$-17y = -14x + 25$

$17y = 14x - 25$

Otra ecuación de la recta, dada en la forma: $y = mx + b$: $= \frac{14}{17}x - \frac{25}{17}$

m = 14/17

θ = arc tan 14/17 ≐ 39° 28' para $0° \leqslant \theta < 180°$

b = − 25/17

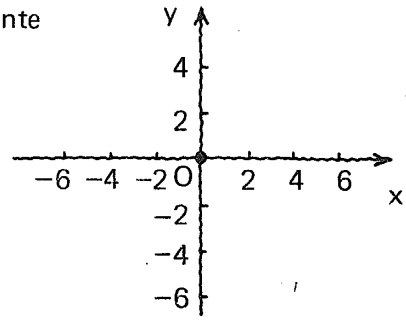
71

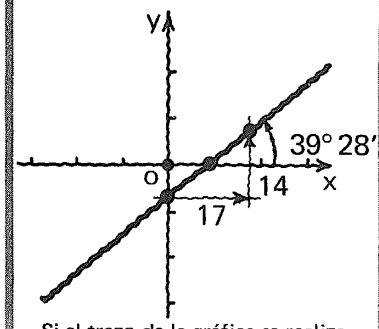
Trazar la gráfica correspondiente a cualquiera de las ecuaciones:

$$14x - 17y = 25$$

o

$$y = \frac{14}{17}x - \frac{25}{17}$$





Si el trazo de la gráfica se realiza con cuidado, la medida del ángulo de inclinación puede ser verificada con la ayuda de un transportador.

6.2.1.2

Práctica adicional de obtención de la ecuación de una recta, en la forma: $y = mx + b$, mediante el cálculo de su pendiente y su ordenada al origen si se considera necesario.

6.2.1.3

Práctica adicional de determinación de la pendiente, la medida del ángulo de inclinación y la ordenada al origen, de una recta dada por alguna de sus ecuaciones si se considera necesario.

6.2.1.

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *trazar* la gráfica cartesiana correspondiente a alguna de las formas: $y = b$ ó $x = a$;
- *dar* una ecuación correspondiente a una recta que es paralela a alguno de los ejes coordenados;
- *obtener* la ecuación: $y = mx + b$, correspondiente a una recta de pendiente m y ordenada al origen b;
- *dar* la ecuación de una recta, en la forma: $y = mx + b$ a partir de la información necesaria para el cálculo de las constantes m y b;
- *trazar* la gráfica correspondiente a una ecuación de la forma: $y = mx + b$;
- *determinar* la pendiente, la ordenada al origen y la medida del ángulo de inclinación de una recta, a partir de una de sus ecuaciones.

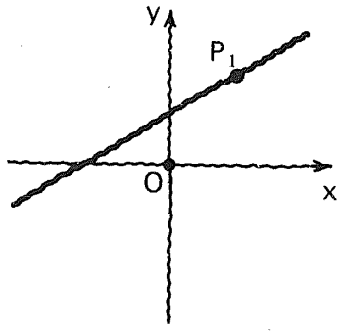
2.2

Ecuación de la recta,
en la forma: $y - y_1 = m(x - x_1)$

72

Es fácil observar que
hay una recta única
de pendiente dada (m),
y que
contiene al punto

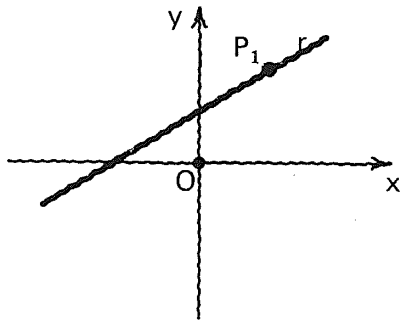
$P_1 = (x_1, y_1)$.



73

Intentaremos obtener
una ecuación
para la recta r,
cuya pendiente es igual a **m**,
y que
"pasa por el punto"

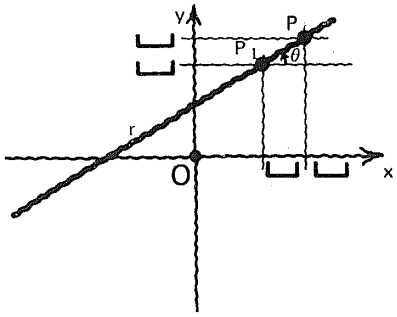
$P_1 = (x_1, y_1)$

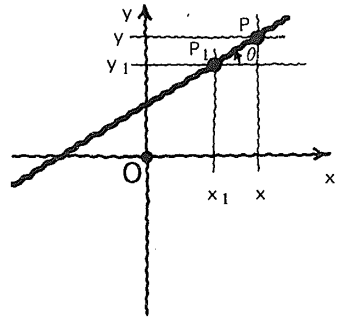


74

Consideremos un punto cualquiera $P = (x, y)$, perteneciente a la recta r.

Rotulemos en los lugares señalados.

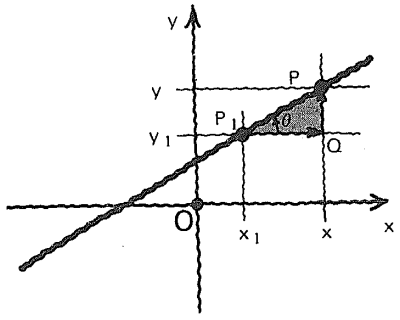




75

En el △ rectángulo P_1PQ:

$\tan \theta =$ ⌊_____⌋



$$\frac{|\overrightarrow{QP}|}{|\overrightarrow{P_1Q}|} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

76

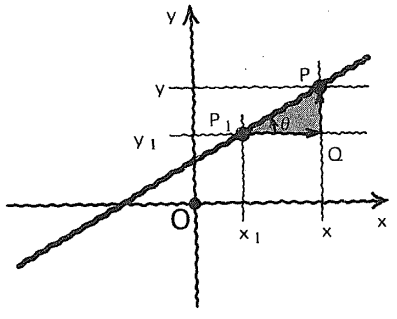
$$\tan \theta = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Por otro lado, hemos definido:

$\tan \theta =$ ⌊_____⌋ ;

por lo tanto,

⌊____⌋ $= \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$



m

m

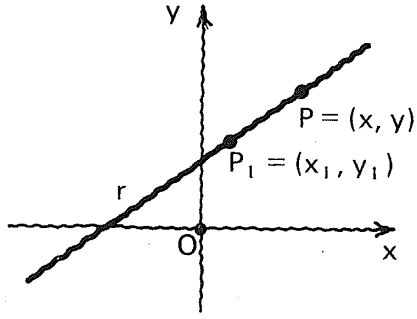
77

Obtenemos
una ecuación para **r**,

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

la cual
puede ser escrita, también
así:

$y - y_1 =$ [ ]



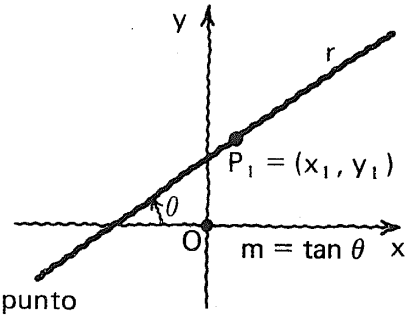
$m(x - x_1)$

78

$y - y_1 = m(x - x_1)$

Esta es otra ecuación
de una recta, ahora
expresada en términos de:

- su pendiente,
  y de
- las coordenadas de un punto
  perteneciente a ella.



79

Dar una ecuación de la recta de pendiente 2,
y que pasa por el punto A = (− 3, 2).

Trazar la gráfica cartesiana.

Ver cuadro siguiente

80

Puesto que los datos son: la pendiente y un punto, escribimos la

expresión general: [ ]

Datos { [ ] = [ ] ; [ ] = [ ] ; [ ] = [ ] } A = [ ]

Ecuación requerida: [ ]

$y - y_A = m(x - x_A)$

$x_A = -3$, $y_A = 2$ } $A = (-3, 2)$

$m = 2$

$y - 2 = 2(x + 3)$

81

Obtenemos la ecuación: $y - 2 = 2(x + 3)$

que puede ser transformada en una ecuación de la forma

$y = mx + b$: [ ]

$y = 2(x + 3) + 2$
$y = 2x + 6 + 2$

$y = 2x + 8$

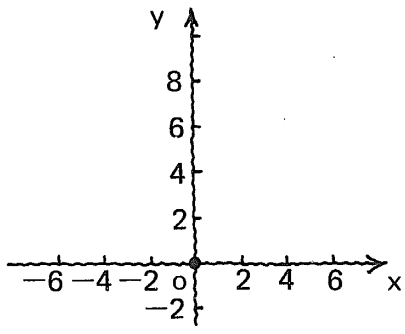
82

Trazar la gráfica correspondiente a cualquiera de las ecuaciones:

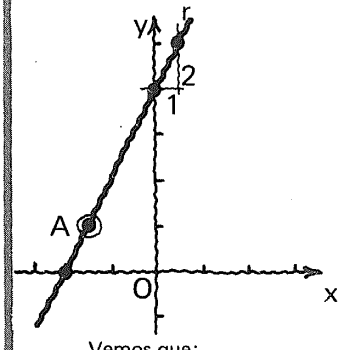
$y - 2 = 2(x + 3)$

o

$y = 2x + 8$



$y - 2 = 2(x + 3)$
$y = 2x + 8$



Vemos que:
$A = (-3, 2) \in r$

83

Una recta pasa por el punto $P = \left(3\frac{3}{4}, -2\frac{1}{3}\right)$
y es paralela a otra recta, una de cuyas ecuaciones es: $2x - 3y = 0$.

Dar la ecuación de la recta, en la forma: $y = mx + b$
y trazar la gráfica cartesiana correspondiente.

84

Expresión general: ⌊_____⌋

Datos { ⌊__⌋ ⌊__⌋ } ⌊__⌋ ⌊__⌋
{ ⌊__⌋ ⌊__⌋
{ ⌊__⌋ ⌊__⌋

Ecuación resultante: ⌊_____⌋

Ecuación de la forma $y = mx + b$: ⌊_____⌋

$y - y_P = m(x - x_P)$

$x_P = 3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$
$y_P = -2\frac{1}{3} = -\frac{7}{3}$
$P = \left(3\frac{3}{4}, -2\frac{1}{3}\right)$

$m = \frac{2}{3}$ pendiente de la recta:
$2x - 3y = 0$ que expresada en la forma $y = mx + b$, es: $y = \frac{2}{3}x$.

$y + \frac{7}{3} = \frac{2}{3}(x - \frac{15}{4})$

$y = \frac{2}{3}x - \frac{29}{6}$

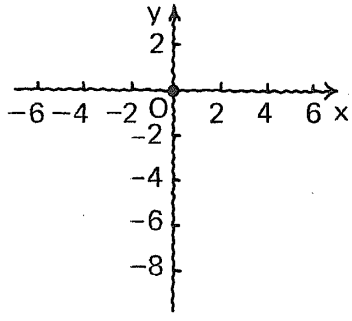
85

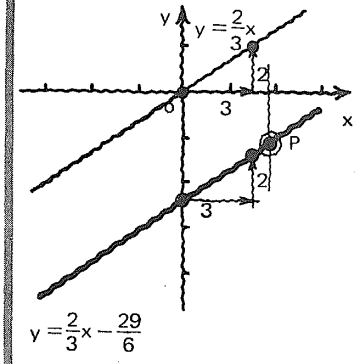
Trazar la gráfica correspondiente a cualquiera de las ecuaciones:

$$y + \frac{7}{3} = \frac{2}{3}\left(x - \frac{15}{4}\right)$$

o

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{29}{6}$$





86

Dar la ecuación en la forma $y = mx + b$, para la recta que pasa por el punto de intersección de la recta: $3.5x + 5.2y = 7.3$ con el eje de las x y es paralela a la recta: $2.1x - 5.2y + 4.5 = 0$.

87

Expresión general: $y - y_i = m(x - x_i)$

Datos:

$x_i = 2.09$ { De $3.5x + 5.2y = 7.3$ obtenemos $x_i = 2.09$ para $y = 0$

$y_i = 0.00$

$m = 0.40$ { Expresada en la forma $y = mx + b$ la ecuación $2.1x - 5.2y + 4.5 = 0$ se transforma en: $y = 0.40x + 0.87$

Ecuación resultante: $y = 0.40\,(x - 2.09)$

Ecuación de la forma $y = mx + b$: $y = 0.40x - 0.836$

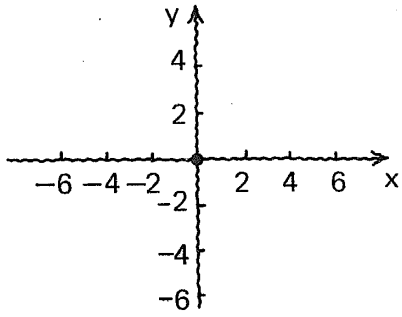
88

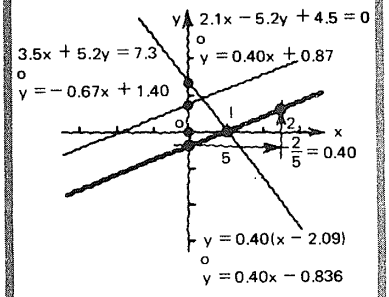
Trazar la gráfica correspondiente a cualquiera de las ecuaciones:

$y = 0.40\,(x - 2.09)$

o

$y = 0.40x - 0.836$





6.2.2.1

Práctica adicional, de obtención
de la ecuación de una recta,
expresada en la forma $y = mx + b$,
dados: un punto perteneciente a ella
y su pendiente,
si se considera necesario.

6.2.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* la ecuación: $y - y_1 = m(x - x_1)$, correspondiente a una recta de pendiente m y que contiene al punto (x_1, y_1);

- *dar* la ecuación de una recta, expresada en alguna de las formas: $y - y_1 = m(x - x_1)$ ó $y = mx + b$, dados un punto perteneciente a ella y su pendiente.

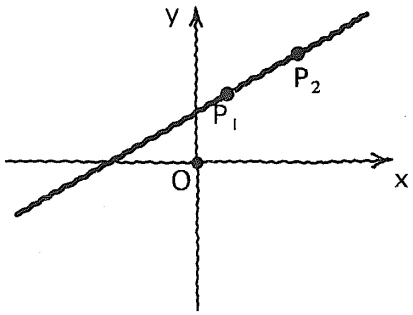
2.3

Ecuación de la recta,

en la forma: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

89

Sabemos que:
dos puntos distintos
en un plano
determinan
una recta única.



90

Podemos obtener una ecuación
para la recta que pasa o es
determinada por los puntos

$P_1 = (x_1, y_1)$

y

$P_2 = (x_2, y_2)$

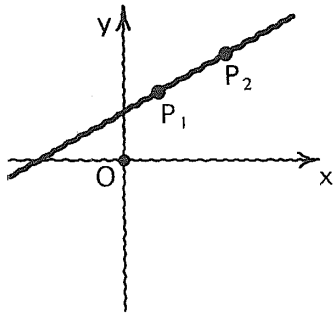
si sustituimos en la ecuación

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$m =$ [ ]

en términos de las coordenadas
de los dos puntos dados.

Ecuación requerida: [ ]



$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

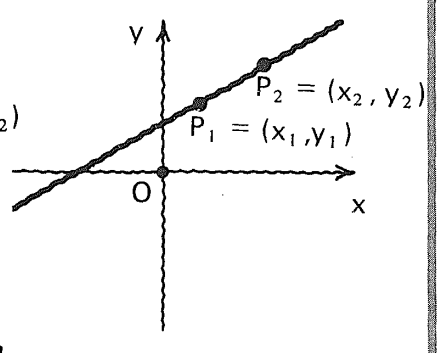
$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

91

Ecuación de la recta determinada por dos puntos:

$P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)$$



Restricción en el dominio $\mathcal{R}$: [ ]

$x_1 \neq x_2$

92

Sabemos que una recta contiene a los puntos:

$A = (-3, -4)$ y $B = (2, 6)$

Dar su ecuación en la forma: $y = mx + b$.

Ver cuadro siguiente

93

Expresión general, teniendo en cuenta la información dada: [ ]

Datos { [ ] = [ ], [ ] = [ ] } [ ] = [ ]

Datos { [ ] = [ ], [ ] = [ ] } [ ] = [ ]

Ecuación resultante: [ ]

Ecuación de la forma $y = mx + b$: [ ]

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\,(x - x_A)$$

$x_A = -3$, $y_A = -4$ } $A = (-3, -4)$

$x_B = 2$, $y_B = 6$ } $B = (2, 6)$

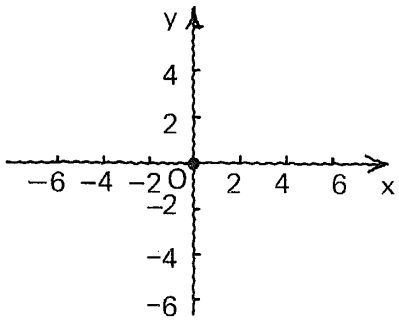
$$y + 4 = \frac{6 + 4}{2 + 3}\,(x + 3)$$

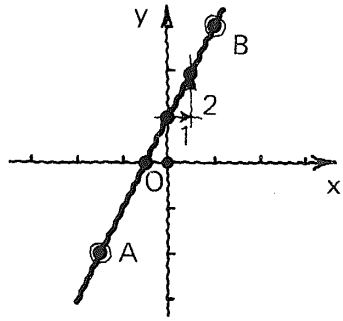
$y = 2x + 2$

Trazar la gráfica de cualquiera de las ecuaciones

$y + 4 = 2(x + 3)$

ó $y = 2x + 2$





6.2.3.1

Práctica adicional, de obtención de la ecuación de una recta expresada en la forma: $y = mx + b$, dados dos puntos pertenecientes a ella si se considera necesario.

6.2.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

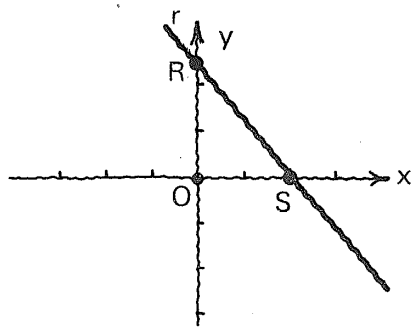
- *obtener* la ecuación: $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ (x - x_1)$ correspondiente a una recta determinada por los puntos: (x_1, y_1) y (x_2, y_2),
- *dar* la ecuación de una recta, expresada en alguna de las formas: $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ (x - x_1)$ ó $y = mx + b$, dados dos puntos pertenecientes a ella.

2.4

Ecuación de la recta,
en la forma: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

95

Ahora,
se nos dan
dos puntos de
la recta r,
muy especiales;
son los puntos de
intersección R y S
de la recta
con los ejes coordenados.



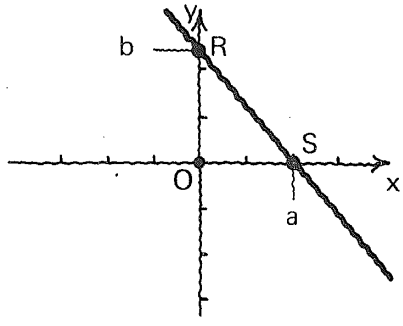
96

A las distancias dirigidas,

a y **b**

se les suele llamar

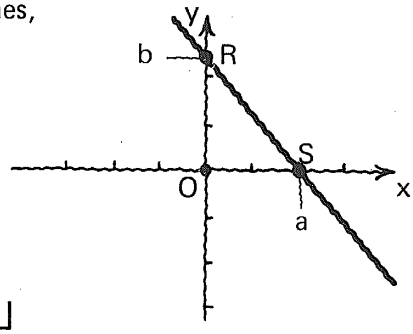
intersepciones.



97

Podemos obtener
una ecuación de la recta,
en términos de las intersepciones,
si sustituimos
en la ecuación

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)$$



las coordenadas de los
puntos R y S.

R = [ ]

S = [ ]

(0, b)

(a, 0)

98

$$y - y_S = \frac{y_R - y_S}{x_R - x_S}\,(x - x_S)$$

se transforma

para $R = (0, b)$
y $S = (a, 0)$

en [ ]

$$y = -\frac{b}{a}\,(x - a)$$

99

Obtenemos la ecuación:

$$\mathbf{y = -\frac{b}{a}\,(x - a)}$$

que vamos a someter a las siguientes transformaciones.

1. Efectuar el producto en el segundo miembro:

   [ ]

   $$-\frac{bx}{a} + b$$

2. Sumar $\frac{bx}{a}$ a ambos miembros:

   [ ]

   $$y + \frac{bx}{a} = b$$

3. Dividir entre **b** ambos miembros:

   [ ]

   $$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$$

100

A la expresión obtenida

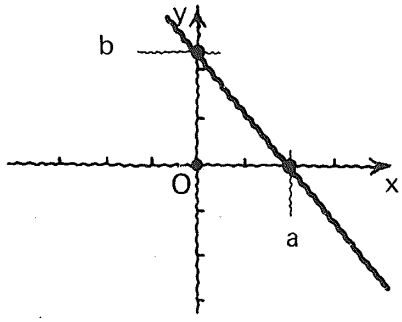
$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$$

que puede ser escrita, también, así:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad a \neq 0 \vee b \neq 0$$

se le suele llamar

ecuación simétrica de la recta.



101

Dar la ecuación en la forma $y = mx + b$ de la recta cuyas intersepciones son:

$a = 4$
$b = 5$

Ver cuadro siguiente.

102

Expresión general: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Datos: $a = 4$

$b = 5$

Ecuación resultante: $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$

Ecuación de la forma $y = mx + b$: $y = -\frac{5}{4}x + 5$

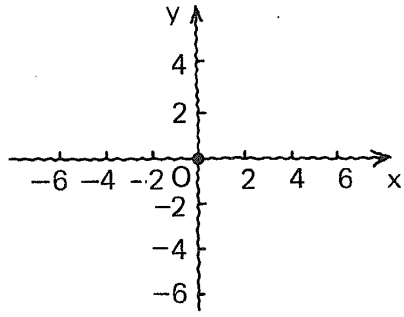
103

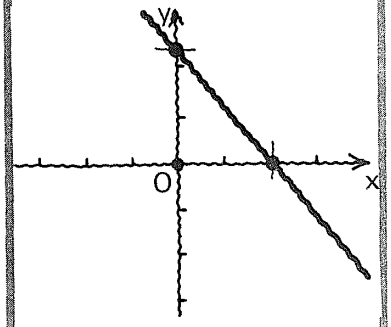
Trazar la gráfica correspondiente a la ecuación

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$$

o a la ecuación

$$y = -\frac{5}{4}x + 5.$$





104

Las intersepciones de una recta son:

en el eje de las x: $\frac{9}{2}$

en el eje de las y: $-\frac{3}{4}$

Dar la ecuación de la recta en la forma $y = mx + b$ y trazar su gráfica cartesiana.

105

Expresión general. [ ]

Datos { [ ] = [ ] ; [ ] = [ ] }

Ecuación resultante: [ ]

Ecuación de la forma $y = mx + b$: [ ]

- $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
- $a = \frac{9}{2}$
- $b = -\frac{3}{4}$
- $\frac{x}{\frac{9}{2}} + \frac{y}{-\frac{3}{4}} = 1$

o bien:

- $\frac{2x}{9} - \frac{4y}{3} = 1$
- $y = \frac{x}{6} - \frac{3}{4}$

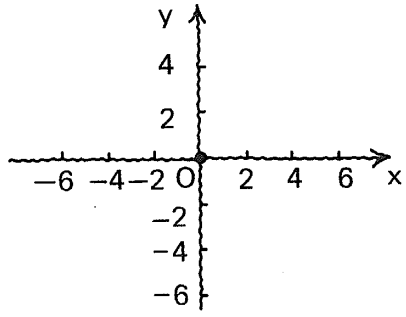
106

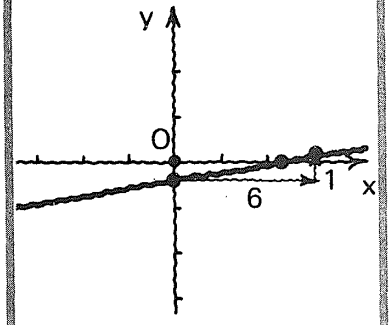
Trazar la gráfica de la ecuación

$$\frac{2x}{9} - \frac{4y}{3} = 1$$

o

$$y = \frac{x}{6} - \frac{3}{4}$$





107

La "ecuación simétrica" de una recta que pasa por el origen es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

No existe una "ecuación simétrica" de una recta que pasa por el origen, puesto que en $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ a y b deben ser diferentes de cero.

6.2.4.1

Práctica adicional
si se considera necesario.

6.2.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* la ecuación: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, correspondiente a una recta dada por sus intersepciones: a y b;
- *dar* la ecuación de una recta, expresada en alguna de las formas: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ o $y = mx + b$, dadas sus intersepciones.

2.5

Ecuación de la recta, en la forma $Ax + By + C = 0$

108

Cualquiera de las ecuaciones de la recta que hemos estudiado, puede ser escrita en la forma

$$Ax + By + C = 0$$
$$A, B, C \in \mathcal{R}$$

que se llama

ecuación general de la recta.

109

En la ecuación

$$Ax + By + C = 0$$

excluiremos la posibilidad de que A y B sean simultáneamente iguales a cero.

110

Si $A = 0$ y $B \neq 0$

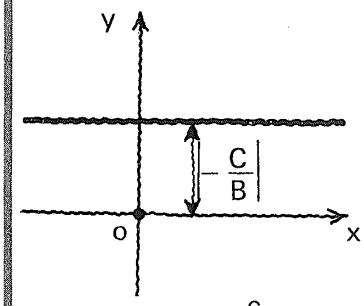
la ecuación

$Ax + By + C = 0$

se transforma en

[ ] o [ ] o [ ]

que corresponde a: [ ]



- $By + C = 0$ • $y + \frac{C}{B} = 0$
- $y = -\frac{C}{B}$
- una recta paralela al eje de las x

111

Si $A \neq 0$ y $B = 0$

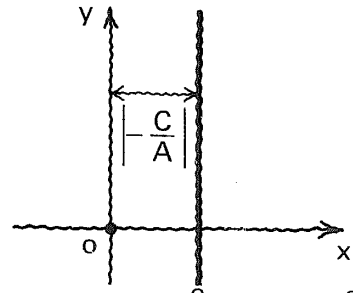
la ecuación

$Ax + By + C = 0$

se transforma en

[ ] o [ ] o [ ]

que corresponde a: [ ]



$Ax + C = 0$ • $x + \frac{C}{A} = 0$ • $x = -\frac{C}{A}$

una recta paralela al eje de las y

112

Si $A \neq 0$ y $B \neq 0$

la ecuación

$Ax + By + C = 0$

representa una recta no paralela a alguno de los ejes coordenados.

113

Sea la siguiente ecuación de una recta, en la forma $y = mx + b$.

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$

Se requiere obtener una ecuación general de la recta.

Transformaciones: →

Ecuación general:

Estudiar con atención.

$$y - \frac{3}{4}x + \frac{5}{4} = 0$$

$$-\frac{3}{4}x + y + \frac{5}{4} = 0$$

$$\frac{3}{4}x - y - \frac{5}{4} = 0$$

de preferencia

$3x - 4y - 5 = 0$

con $A, B, C \in \mathbb{Z} \wedge A > 0$

114

Se requiere la ecuación general de una recta, cuya ecuación de la forma

$y - y_1 = m(x - x_1)$ es: $\mathbf{y + 4 = -3(x - 3)}$

Transformaciones:

Ecuación general con $A, B, C \in \mathbb{Z} < A > 0$:

$y + 4 = -3x + 9$

$y + 4 + 3x - 9 = 0$

$3x + y - 5 = 0$

115

Se requiere la ecuación general de una recta que tiene la siguiente ecuación de la forma:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

$$\mathbf{y + 4 = \frac{6 + 4}{2 + 3}(x + 3)}$$

Transformaciones:

Ecuación general con $A, B, C \in \mathbb{Z} \wedge A > 0$:

$y + 4 = 2(x + 3)$

$y + 4 = 2x + 6$

$y + 4 - 2x - 6 = 0$

$-2x + y - 2 = 0$

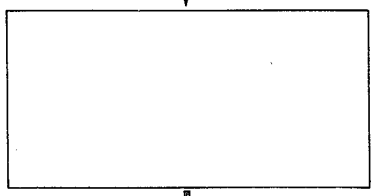
$2x - y + 2 = 0$

116

Se requiere la ecuación general de una recta cuya ecuación de la forma: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ es:

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{-3}=1$$

Transformaciones:



Ecuación general:

$$\frac{x}{5}-\frac{y}{3}=1$$

$$\frac{3x-5y}{15}=1$$

$$3x-5y-15=0$$

6.2.5.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

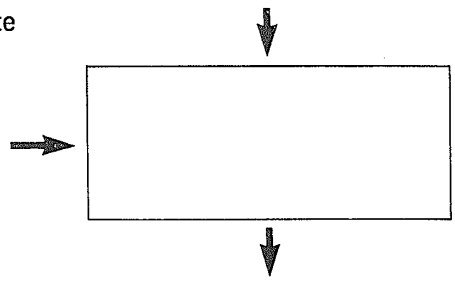
117

Se tiene la siguiente ecuación general de una recta:

$$4x-5y-7=0$$

Se requiere una ecuación equivalente de la forma $y = mx + b$.

Transformaciones:



Ecuación de la forma $y = mx + b$:

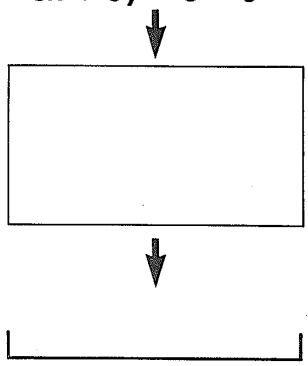
$$-5y=-4x+7$$

$$y=\frac{-4x}{-5}+\frac{7}{-5}$$

$$y=\frac{4}{5}x-\frac{7}{5}$$

118

Ecuación general de una recta: $3x + 5y - 8 = 0$



Transformaciones:

Ecuación de la forma $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$

$3x + 5y = 8$

$\frac{3x}{8} + \frac{5y}{8} = 1$

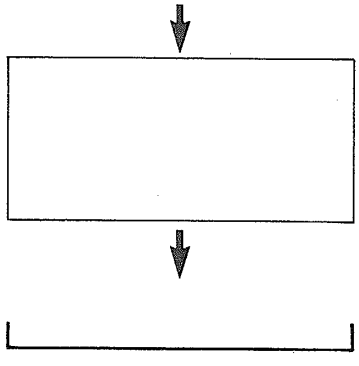
$\frac{x}{\frac{8}{3}} + \frac{y}{\frac{8}{5}} = 1$

6.2.5.2

Práctica adicional,
si se considera necesario.

119

Transformemos ahora la ecuación general: $Ax + By + C = 0$



en una ecuación de la forma: $y = mx + b$.

Transformaciones:

Ecuación de la forma $y = mx + b$:

$By = -Ax - C$

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

o bien,

$y = -\frac{A}{B}x + (-\frac{C}{B})$

120

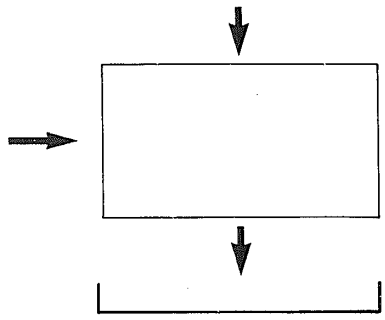
Transformemos la ecuación general:

$$Ax + By + C = 0$$

en una ecuación de la forma:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Transformaciones:



Ecuación de la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$Ax + By = -C$$

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1$$

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

121

Hemos obtenido:

$$Ax + By + C = 0$$

$$y = -\frac{A}{B}x + \left(-\frac{C}{B}\right) \qquad \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

De la observación de este esquema podemos establecer que

- la pendiente $m =$ ⌊⌋
- la abscisa al origen o intersepción a $a =$ ⌊⌋
- la ordenada al origen o intersepción b $b =$ ⌊⌋

$$-\frac{A}{B}$$

$$-\frac{C}{A}$$

$$-\frac{C}{B}$$

122

$$Ax + By + C = 0$$

- $m = -\frac{A}{B}$
- $b = -\frac{C}{B}$
- $a = -\frac{C}{A}$

Estas expresiones nos permiten calcular, en forma rápida, la pendiente y las intersepciones de una recta, a partir de su ecuación general.

123

$2x - 3y + 4 = 0$

es una ecuación general de una recta.

Se requiere conocer:

su pendiente $m = \square = \square$

sus intersepciones
$a = \square = \square$
$b = \square = \square$

expresiones generales

$$-\frac{A}{B} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$-\frac{C}{A} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$-\frac{C}{B} = -\frac{4}{-3} = \frac{4}{3}$$

124

Tracemos la gráfica de la ecuación

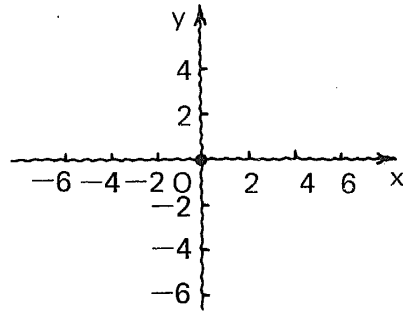
$2x - 3y + 4 = 0$

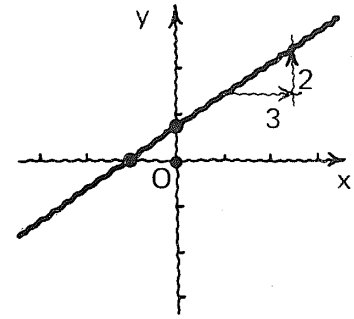
sabiendo que:

$m = \frac{2}{3}$

$a = -2$

$b = \frac{4}{3}$





125

$0.45x + 0.62y - 0.87 = 0$

es una ecuación general de una recta, de la cual se requiere conocer:

- su pendiente $m = \square$
- la medida del ángulo de inclinación $\theta = \square$
- las intersepciones
  $a = \square$
  $b = \square$

$$-\frac{A}{B} = -\frac{0.45}{0.62} \doteq -0.72580645$$

arc tan $(-0.72580645) = 144° 02'$
para $0 \leqslant \theta < 180°$

$$-\frac{C}{A} = -\frac{-0.87}{0.45} \doteq 1.93$$

$$-\frac{C}{B} = -\frac{-0.87}{0.62} \doteq 1.40$$

126

Trazar la gráfica
de la ecuación

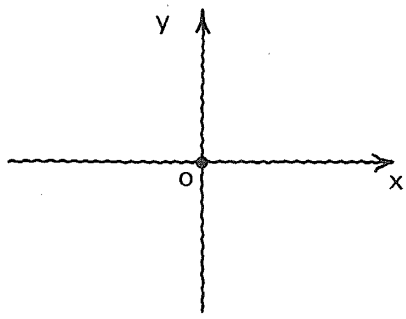
$0.45x + 0.62y - 0.87 = 0$

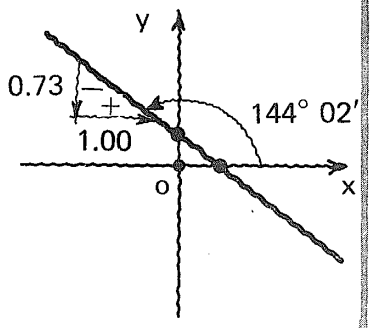
sabiendo que:

$m \doteq -0.72580645$

$a \doteq 1.93$

$b \doteq 1.40$





127

$47x - 18y = 0$

es una ecuación general de una recta, de la que se requiere conocer:

su pendiente $m =$ ____

la medida de su ángulo de inclinación $\theta =$ ____

sus intersepciones $a =$ ____ ; $b =$ ____

$$-\frac{A}{B} = -\frac{47}{-18} \doteq 2.61$$

$69° 03'$

$$-\frac{C}{A} = -\frac{0}{47} = 0$$

$$-\frac{C}{B} = -\frac{0}{-18} = 0$$

128

Trazar la gráfica
de la ecuación

$47x - 18y = 0$

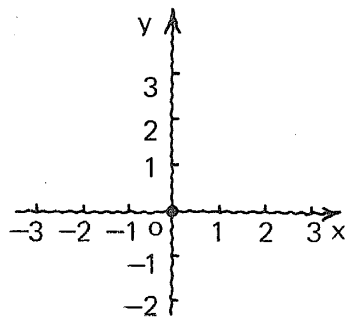
sabiendo que:

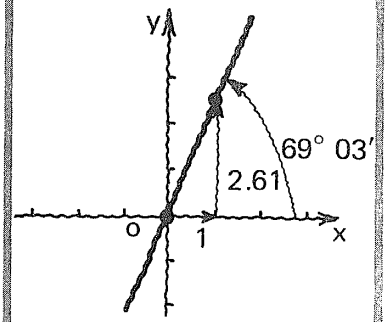
$m = \frac{47}{18} \doteq 2.61$

$\theta \doteq 69° 03'$

$a = 0$

$b = 0$





129

Podemos observar que la ecuación $Ax + By + C = 0$

en que $\bullet\ m = -\frac{A}{B}$ $\bullet\ b = -\frac{C}{B}$ y $\bullet\ a = -\frac{C}{A}$

corresponde a una recta que pasa por el origen,

si [ ]

$C = 0$

pues en ese caso:

$b = -\frac{C}{B} = -\frac{0}{B} = 0$

y

$a = -\frac{C}{A} = -\frac{0}{A} = 0$

130

$5y - 8 = 0$

es una ecuación general de una recta, de la que se requiere conocer:

su pendiente $m =$ [ ]

sus intersepciones $a =$ [ ] $b =$ [ ]

$= -\frac{A}{B} = -\frac{0}{5} = 0$

$= -\frac{C}{A} = -\frac{-8}{0} =$

número no definido

$= -\frac{C}{B} = -\frac{-8}{5} = \frac{8}{5}$

131

Trazar la gráfica de la ecuación

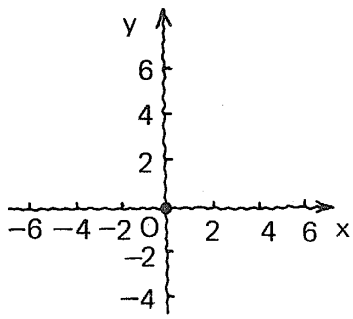
$5y - 8 = 0$

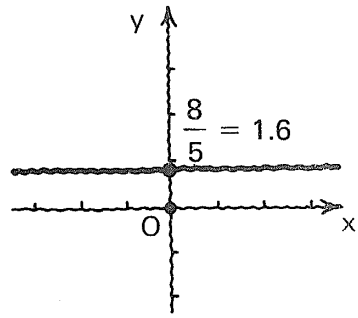
sabiendo que:

$m = 0$

$a =$ número no definido

$b = \frac{8}{5}$





132

$3x - 12 = 0$

es una ecuación general de una recta.

Se requiere conocer:

su pendiente $m =$ [ ]

sus intersepciones $a =$ [ ]

$b =$ [ ]

$-\frac{A}{B} = -\frac{3}{0} =$ número no definido

$-\frac{C}{A} = -\frac{-12}{3} = 4$

$-\frac{C}{B} = -\frac{-12}{0} =$ número no definido

133

Trazar la gráfica de la ecuación

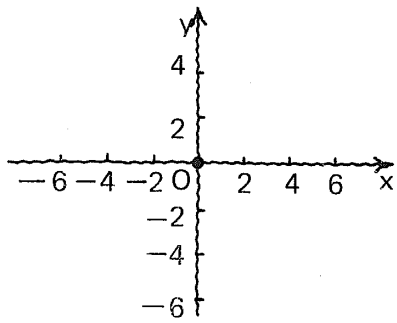
$3x - 12 = 0$

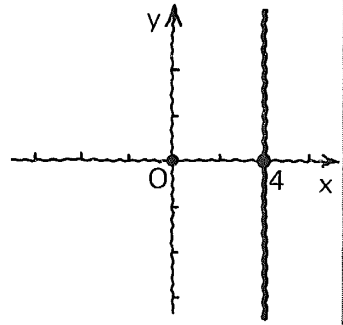
sabiendo que:

m no está definida

$a = 4$

b no está definida





134

Completar.

La ecuación $Ax + By + C = 0$

representa una recta [ ] si $C = 0$, $A \neq 0$ y $B \neq 0$

representa una recta [ ] si $A = 0$, $B \neq 0$ y $C \neq 0$

representa una recta [ ] si $B = 0$, $A \neq 0$ y $C \neq 0$

representa una recta [ ] si $B = 0$, $C = 0$ y $A \neq 0$

representa una recta [ ] si $A = 0$, $C = 0$ y $B \neq 0$

representa una recta [ ] si $A \neq 0$, $B \neq 0$ y $C \neq 0$

que pasa por el origen

paralela al eje de las x

paralela al eje de las y

coincidente con el eje de las y

coincidente con el eje de las x

no paralela a alguno de los ejes y que no pasa por el origen

6.2.5.3

Práctica adicional, de determinación de la pendiente, la medida del ángulo de inclinación y las intersepciones de una recta dada por su ecuación general, si se considera necesario.

6.2.5.4

Práctica adicional, de trazo de la gráfica cartesiana correspondiente a una ecuación de la forma

$Ax + By + C = 0,$

si se considera necesario.

6.2.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *transformar* una ecuación de una recta, dada en alguna de las formas:
  $y = mx + b$
  $y - y_1 = m(x - x_1)$
  $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
  en una ecuación de la forma: $Ax + By + C = 0$ o viceversa,
- *determinar* la pendiente, la medida del ángulo de inclinación, y las intersepciones de una recta dada por una ecuación de la forma: $Ax + By + C = 0,$
- *trazar* la gráfica de una recta dada por su ecuación general.

2.6

Las ecuaciones de la recta.

Resumen

135

Expresada en términos de:

la pendiente
la ordenada al origen

la ecuación de una recta tiene la forma:

$y = mx + b$

en que: m es la pendiente,
y
b es la ordenada al origen

136

Expresada en términos de:

la pendiente
y
las coordenadas de un punto

la ecuación de una recta toma la forma:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

en que: **m** es la pendiente,
y
$\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{y_1}$ son las coordenadas de un punto en la recta

137

Expresada en términos de:

las coordenadas de dos puntos

la ecuación de una recta tiene la forma:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

en que: (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos en la recta

138

Expresada en términos de:

las intersepciones

la ecuación de una recta puede escribirse así:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

en que: **a** es la intersepción en x (o abscisa al origen, y **b** la intersepción en y (u ordenada al origen)

139

Expresada en su **forma general,**

la ecuación de una recta tiene el siguiente aspecto:

$$Ax + By + C = 0$$

en que:

$$m = -\frac{A}{B} \quad \text{(pendiente)}$$

$$a = -\frac{C}{A} \quad \text{(intersepción en x o abscisa al origen)}$$

$$b = -\frac{C}{B} \quad \text{(intersepción en y u ordenada al origen)}$$

Resumen

Ecuaciones de la recta

1. Ecuación *pendiente-ordenada al origen*:

$$y = mx + b \quad m, b \in \mathbb{R}$$

2. Ecuación *pendiente-punto*:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad m, x_1, y_1 \in \mathbb{R}$$

3. Ecuación *dos puntos*:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad \begin{matrix} x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 \neq x_2 \end{matrix}$$

4. Ecuación *simétrica*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad a, b \in \mathbb{R} \wedge (a \neq 0 \vee b \neq 0)$$

5. Ecuación *general*:

$$Ax + By + C = 0 \qquad \begin{matrix} A, B, C \in \mathbb{R} \\ \wedge \sim (A = 0 \wedge B = 0) \end{matrix}$$

6.2.6.1

Práctica
de aplicación
de las diversas
ecuaciones de la
recta,
si se considera necesario.

6.2.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *escribir* la ecuación de una recta, en cualquiera de las formas:

  1. pendiente-ordenada al origen
  2. pendiente-punto
  3. dos puntos
  4. simétrica
  5. general

2.7

Intersección de rectas

141

Recordemos que

si $y = m_1 x + b_1$ y $y = m_2 x + b_2$

son ecuaciones de dos rectas r_1 y r_2, respectivamente,

$r_1 = r_2 \iff$ [_____]

$m_1 = m_2 \wedge b_1 = b_2$

142

Si $y = m_1 x + b_1$ es una ecuación de r_1
y $y = m_2 x + b_2$ es una ecuación de r_2,

$r_1 \parallel r_2 \iff$ [_____]

$m_1 = m_2$

143

Si $y = m_1 x + b_1$ es una ecuación de r_1
y $y = m_2 x + b_2$ es una ecuación de r_2

$r_1 \perp r_2 \iff$ [ ]

$$\begin{cases} m_1 \, m_2 = -1 \\ \text{ó} \\ m_1 = -\dfrac{1}{m_2} \\ \text{ó} \\ m_2 = -\dfrac{1}{m_1} \end{cases}$$

144

$y = m_1 x + b_1$
(es una ecuación de r_1)

$y = m_2 x + b_2$
(es una ecuación de r_2)

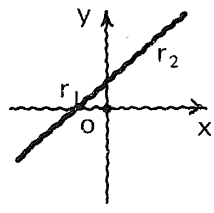
r_1 y r_2 **se intersecan en un punto único** $\iff$ [ ]

$m_1 \neq m_2$

145

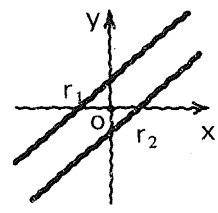
Resumen: incidencia de rectas en el plano.

$y = m_1 x + b_1$ es la ecuación de r_1. $y = m_2 x + b_2$ es la ecuación de r_2.



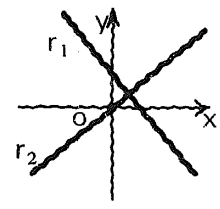
$m_1 = m_2$
$b_1 = b_2$

r_1 y r_2 son coincidentes o iguales



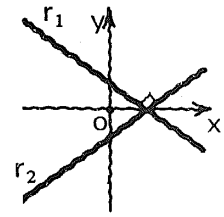
$m_1 = m_2$
$b_1 \neq b_2$

r_1 y r_2 son paralelas no coincidentes



$m_1 \neq m_2$
$m_1 m_2 = -1$

r_1 y r_2 son perpendiculares



$m_1 \neq m_2$

r_1 y r_2 son concurrentes.

146

Recordemos, además, que para determinar el

punto de intersección

de dos

rectas concurrentes

hay que encontrar el

conjunto solución del

sistema conjuntivo

formado por las

ecuaciones de las rectas.

147

Si

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ es una ecuación de la recta r_1

y

$A_2x + B_2y + C_2 = 0$ es una ecuación de la recta r_2,

el conjunto solución del sistema:

$\mathbf{A_1x + B_1y + C_1 = 0 \wedge A_2x + B_2y + C_2 = 0}$

es $r_1 \cap r_2 = \{(x_i, y_i)\}$

148

$\mathbf{x - y + 8 = 0}$ es una ecuación de la recta r_1

$\mathbf{2x + 3y - 9 = 0}$ es una ecuación de la recta r_2

Se requiere determinar $r_1 \cap r_2 = \{(x_i, y_i)\}$

149

Resolvamos el sistema:

$x - y + 8 = 0$

$\wedge$

$2x + 3y - 9 = 0$

por cualquiera de los métodos conocidos.

$x =$ ⌊_____⌋

$y =$ ⌊_____⌋

-3

5

150

$x - y + 8 = 0$ (r_1)

$\wedge$

$2x + 3y - 9 = 0$ (r_2)

Encontramos:

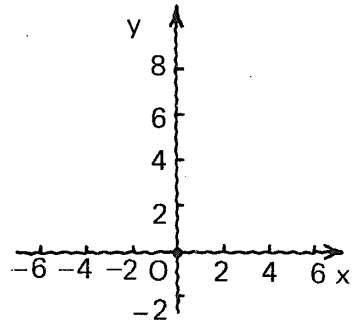
$x = -3$

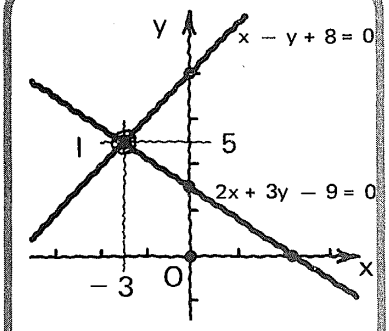
$y = 5$

es decir:

$I = r_1 \cap r_2 = (-3, 5)$

Representación gráfica (completar)





6.2.7.1

Práctica adicional
de determinación
del punto de
intersección
de dos
rectas concurrentes,
si se considera necesario.

6.2.7

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *enunciar* las condiciones para que dos rectas en el plano cartesiano sean:

  1. iguales o coincidentes
  2. paralelas
  3. perpendiculares
  4. concurrentes

- *determinar* el punto de intersección de dos rectas, cada una de ellas representada por una de sus ecuaciones.

2.8

Distancia de un punto a una recta

151

Nos propondremos,
ahora,
encontrar una expresión
que nos permita calcular la

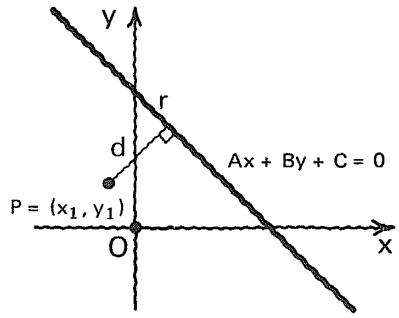
distancia (d) de un punto

$P = (x_1, y_1)$

a una recta (r),

dada por la ecuación general:

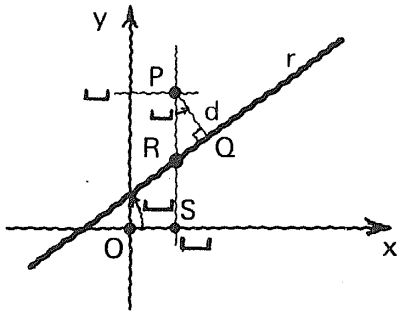
$Ax + By + C = 0$

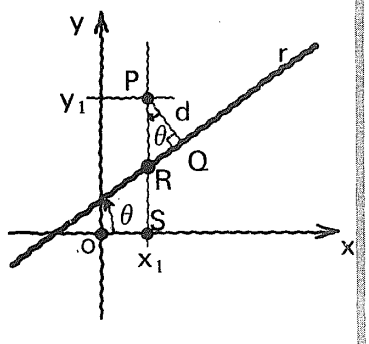


$Ax + By + C = 0$
$P = (x_1, y_1)$

152

En el trazo adjunto,
rotulemos
en los lugares señalados.

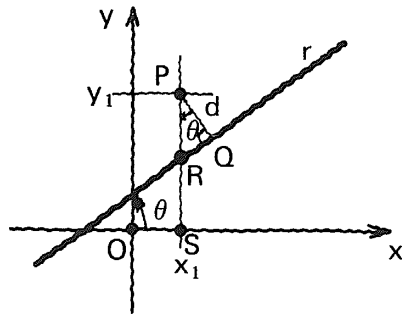




153

En el △ rectángulo PQR

$$\frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{PR}|} = \text{[\_\_\_\_\_]}$$



cos θ

154

$$\frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{PR}|} = \cos\theta$$

ó

$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PR}| \cos\theta$

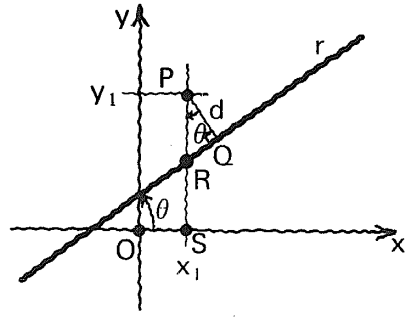
pero $|\overrightarrow{PQ}| = d$

(que es la distancia buscada)

Entonces,

$d = |\overrightarrow{PR}| \cos\theta$

Nuestro problema consiste en expresar $|\overrightarrow{PR}|$ en términos de los elementos conocidos.



155

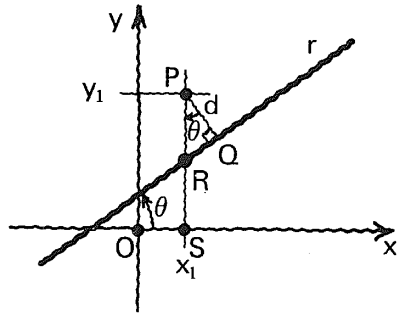
$d = |\overrightarrow{PR}| \cos\theta$

Por lo pronto:

$|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{PS} - \overrightarrow{RS}|$

ó

$|\overrightarrow{PR}| = |y_1 - y_R|$



156

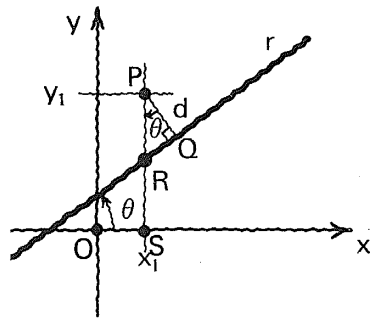
Entonces

- $d = |y_1 - y_R| \cos \theta$

Si observamos con atención podemos darnos cuenta que, como

$R \in r$

podemos obtener y_R sustituyendo la abscisa x_1 en la ecuación de la recta r y despejando la ordenada.



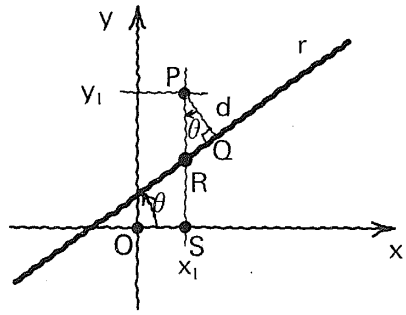
157

- $d = |y_1 - y_R| \cos \theta$

En la ecuación de r:

Ax + By + C = 0

sustituyamos entonces, las coordenadas de $R = (x_1, y_R)$ y despejemos y_R



$Ax_1 + By_R + C = 0$

$By_R = -Ax_1 - C$

$y_R = -\frac{A}{B} x_1 - \frac{C}{B}$

158

- $d = |y_1 - y_R| \cos \theta$

Como $y_R = -\frac{A}{B} x_1 - \frac{C}{B}$

$$d = \left| y_1 - \left(-\frac{A}{B} x_1 - \frac{C}{B} \right) \right| \cos \theta$$

ó

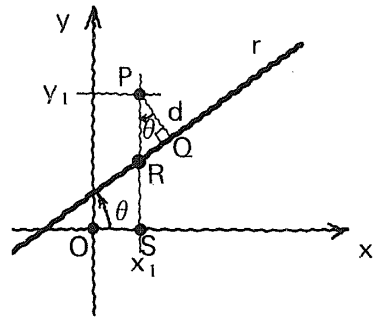
$$d = \left| y_1 + \frac{Ax_1}{B} + \frac{C}{B} \right| \cos \theta$$

ó

$$d = \left| \frac{By_1 + Ax_1 + C}{B} \right| \cos \theta$$

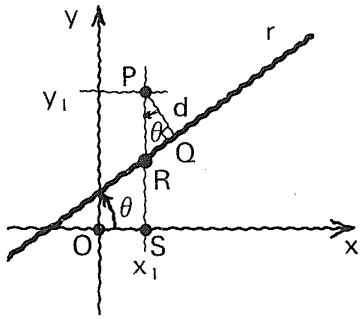
ó

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{B} \right| \cos \theta$$



159

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{B} \right| \cos\theta$$



Por otro lado,
vamos a expresar $\cos\theta$
en función de $\tan\theta$ (o sea de **m**)
partiendo de la
identidad pitagórica:

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$$

$$\cos\theta = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1 + \tan^2\theta}$$

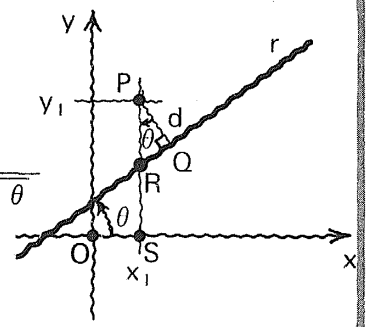
$$\cos\theta = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \tan^2\theta}}$$

● $\dfrac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}}$

seleccionando el signo +, puesto que estamos interesados en la distancia no dirigida

160

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{B} \right| \cos\theta$$



queda transformada en:

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{B} \right| \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}}$$

pero;

$$\tan\theta = m = -\frac{A}{B}$$

entonces:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$\dfrac{1}{\sqrt{1 + m^2}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{A}{B}\right)^2}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{A^2}{B^2}}}$

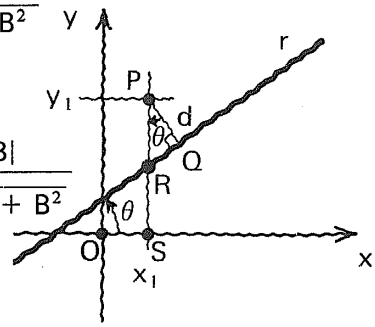
$\dfrac{1}{\sqrt{\frac{A^2 + B^2}{B^2}}}$

$\dfrac{1}{\frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{|B|}}$

● $\dfrac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

161

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{B} \right| \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



o bien

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{|B|} \right| \cdot \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

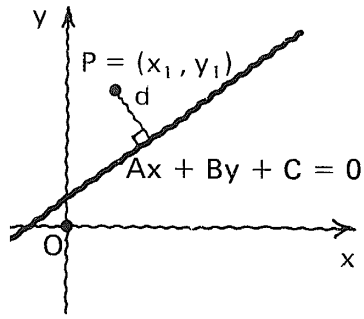
o finalmente

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

162

Así pues,
la distancia de un punto
$P = (x_1, y_1)$
a la recta $Ax + By + C = 0$
queda expresada así:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



A, B, C $\in \Re \wedge$ A y B no siendo simultáneamente iguales a 0.

163

Por ejemplo,
se requiere determinar
la distancia
del punto $(-3, -4)$
a la recta

$4x - 3y + 5 = 0.$

Ver cuadro siguiente

164

Expresión general: $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Datos:
- para el punto: $x_1 = -3$, $y_1 = -4$
- para la recta: $A = 4$, $B = -3$, $C = 5$

Expresión resultante: $d = \frac{|4(-3) + (-3)(-4) + 5|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$

Expresión simplificada: $d = \frac{|5|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$

165

Representación gráfica.

Recta:

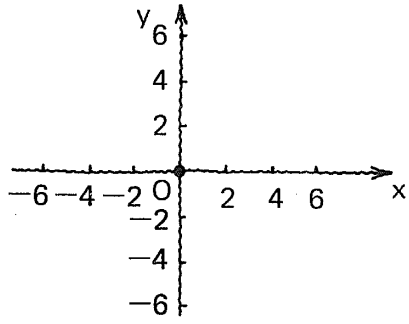
$4x - 3y + 5 = 0$

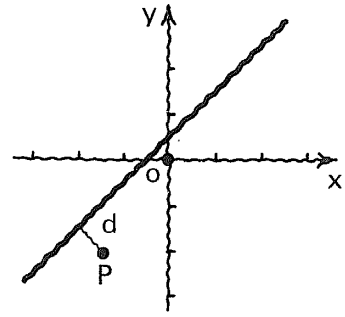
Punto:

$(-3, -4)$

Distancia:

1





166

Expresión general de la distancia de un punto a una recta.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Expresión particular de la distancia del origen a una recta.

Para:

$x_1 = 0$
$y_1 = 0$

$$d = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

167

Determinar la distancia del origen a la recta $5x + 4y - 20 = 0$

Ver cuadro siguiente.

168

Expresión general: $\underline{\qquad\qquad\qquad}$

Datos $\begin{cases} \underline{\qquad} = \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} = \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} = \underline{\qquad} \end{cases}$

$d = \underline{\qquad\qquad\qquad}$

$$d = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$A = 5$

$B = 4$

$C = -20$

$$d = \frac{|-20|}{\sqrt{5^2 + 4^2}}$$

$d \doteq 3.12$

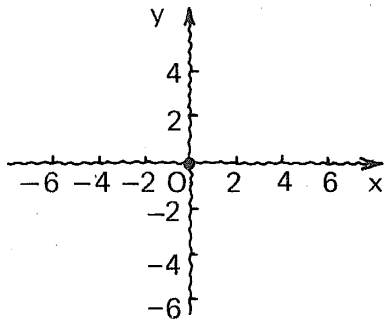
169

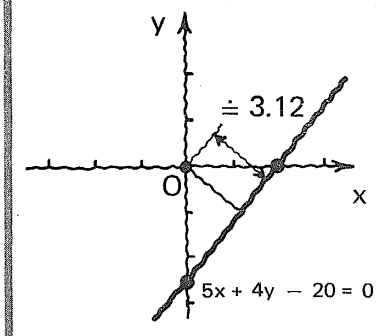
Recta :

$5x + 4y - 20 = 0$

Distancia del origen a la recta:

$\doteq 3.12$





6.2.8.1

Práctica adicional de determinación de la distancia de un punto a una recta, si se considera necesario.

6.2.8

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* las expresiones: $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ y $d = \dfrac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ correspondientes a la distancia de un punto a una recta y del origen a una recta, respectivamente;

- *determinar* la distancia de un punto dado a una recta dada.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 15 de agosto de 1984,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO MIA KC 100

Bloque 6:

Geometría analítica

En los ocho *módulos de color morado* que forman el bloque 6, *Geometría analítica*, se amplían y formalizan los conceptos de relación, función y gráfica cartesiana. En el *módulo 1* se incluyen algunos conceptos y procedimientos elementales, tales como:

- Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano
- División de un segmento rectilíneo según una razón dada
- Ángulo formado por dos rectas concurrentes
- Pendiente y ángulo de inclinación de una recta

Después, se conduce *paso a paso* al lector hacia la revisión de los lugares geométricos más comunes. Así, en el *módulo 2* se analiza la recta; en el *módulo 3*, la circunferencia; en el *módulo 4*, la elipse; en el *módulo 5*, la hipérbola, y en el *módulo 6*, la parábola.

Luego, con el estudio de las cónicas y la ecuación general de segundo grado, el cual se realiza en el *módulo 7*, se accede a la integración de un gran marco conceptual.

Dicho marco conceptual se amplía aún más en el *módulo 8*, donde se brindan los elementos necesarios para llevar a cabo el análisis de cualquier lugar geométrico del plano cartesiano.

Por último, las fórmulas y los conceptos fundamentales de todos los temas comprendidos en los módulos que integran este bloque, aparecen en el módulo de resumen llamado *Memo 6. Geometría analítica.*

Bloque	Módulo	Módulo de resumen
1 **ÁLGEBRA** ESTRUCTURAS Y OPERACIONES **Libros color café**	*1- Conjuntos* *2- Estructuras matemáticas* *3- El conjunto de los enteros* *4- Operaciones con enteros* *5- Lenguaje algebraico 1. Formación* *6- Lenguaje algebraico 2. Transformación* *7- Operaciones con polinomios 1. Suma, resta, multiplicación y división* *8- Operaciones con polinomios 2. Productos notables* *9- Operaciones con polinomios 3. Factorización* *10- El conjunto de los racionales* *11- Operaciones con expresiones racionales* *12- El conjunto de los reales* *13- Operaciones con expresiones reales* *14- El conjunto de los complejos. Estructura y operaciones*	***MEMO 1*** *ÁLGEBRA. ESTRUCTURAS Y OPERACIONES*
2 **ÁLGEBRA** MODELOS **Libros color verde**	*1- La ecuación como modelo matemático* *2- Ecuaciones de primer grado* *3- Sistemas de ecuaciones de primer grado* *4- Desigualdades de primer grado* *5- Ecuaciones de segundo grado* *6- Desigualdades de segundo grado* *7- La relación como modelo matemático* *8- Funciones* *9- Funciones exponenciales* *10- Funciones logaritmicas* *11- Ecuaciones, desigualdades y sistemas. Soluciones gráficas* *12- Resolución de problemas*	***MEMO 2*** *ÁLGEBRA. MODELOS*
3 **NOCIONES DE LÓGICA MATEMÁTICA** **Libros color azul**	*1- Lógica proposicional 1. Proposiciones* *2- Lógica proposicional 2. Argumentos*	***MEMO 3*** *NOCIONES DE LÓGICA MATEMÁTICA*
4 **GEOMETRÍA EUCLIDIANA** **Libros color rojo**	*1- Conjuntos de puntos* *2- Relaciones binarias* *3- Figuras planas* *4- El aparato demostrativo. Ángulos y triángulos.* *5- Polígonos convexos* *6- Relación de semejanza* *7- Geometría métrica en el plano* *8- Cuerpos geométricos*	***MEMO 4*** *GEOMETRÍA EUCLIDIANA*
5 **TRIGONOMETRÍA** **Libros color ocre**	*1- Las razones trigonométricas de un ángulo agudo* *2- Resolución de triángulos rectángulos* *3- El círculo trigonométrico* *4- Las funciones trigonométricas* *5- Las funciones trigonométricas inversas* *6- Identidades trigonométricas* *7- Resolución de triángulos cualesquiera* *8- Ecuaciones trigonométricas*	***MEMO 5*** *TRIGONOMETRÍA*
6 **GEOMETRÍA ANALÍTICA** **Libros color morado**	*1- Introducción a la geometría analítica* ***2- La recta*** *3- La circunferencia* *4- La elipse* *5- La hipérbola* *6- La parábola* *7- Las cónicas y la ecuación general de segundo grado* *8- Relaciones y lugares geométricos*	***MEMO 6*** *GEOMETRÍA ANALÍTICA*
7 **CÁLCULO DIFERENCIAL** **Libros color azul turquesa**	*1- Introducción al cálculo diferencial* *2- Límite de una función* *3- Continuidad de una función* *4- Derivación de funciones algebraicas* *5- Derivación de funciones trascendentes* *6- Extremos de una función (máximos y mínimos)*	***MEMO 7*** *CÁLCULO DIFERENCIAL*
8 **CÁLCULO INTEGRAL** **Libros color negro**	*1- Sumatoria y notación sigma* *2- La integral definida y la integral indefinida* *3- Integrales elementales* *4- Métodos de integración 1* *5- Métodos de integración 2* *6- Algunas aplicaciones del cálculo integral*	***MEMO 8*** *CÁLCULO INTEGRAL*

ISBN 968-24-1249-8